Racine n-ième de l'unité

Isabelle GIL

Maître de Conférences, Cnam

Résolution de $z^n = Z$

$z = re^{i\alpha}$ est **une racine n-ième** de $Z = \rho e^{i\theta}$ si et seulement si : $z^n = Z$.

$$
\begin{aligned}
& r^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\theta} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Résolution de $z^n = 1$

$z = re^{i\alpha}$ est **une racine n-ième** de $Z = e^{i0}$ si et seulement si : $z^n = Z$.

$$
\begin{aligned}
& r^n e^{in\alpha} = e^{i0} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} r^n = 1 \\ n\alpha = 2k\pi \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} r = 1 \\ \alpha = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Propriété

Les racines n-ièmes de l'unité peuvent s'écrire :

$$S = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}}\right\}$$

Si on pose :

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

on peut alors écrire :

$$S = \left\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\right\}$$

Interprétation graphique

Les points solutions sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.