Racines d'un polynôme

Isabelle GIL

Maître de Conférences, Cnam

Trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$

discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

☞ **Si** $\Delta > 0$: deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

☞ **Si** $\Delta = 0$: une racine réelle double

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

☞ **Si** $\Delta < 0$: deux racines complexes

Résolution de $x^2 + 3x + 5 = 0$

☞ discriminant : $\Delta = -11$ et $\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{11}$

☞ racines : $x_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{11}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{11}}{2}$

Racines complexes d'un trinôme à coefficients réels

Les racines complexes d'un trinôme du second degré à coefficients réels sont conjuguées.

Résolution de $x^2 + (4 - i)x + 7 + 19i = 0$

- ☞ discriminant : $\Delta = -13 - 84i$

- ☞ racines :

$$x_1 = \frac{-(4 - i) - (6 - 7i)}{2} = -5 + 4i$$

$$x_2 = \frac{-(4 - i) + (6 - 7i)}{2} = 1 - 3i$$

Théorème

Un polynôme à coefficients complexes de degré n positif, s'écrit de façon unique sous la forme

$$P(x) = a_n(x - r_1)^{m_1}\,(x - r_2)^{m_2}\ldots(x - r_k)^{m_k}$$

avec $d^\circ P = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k$ et $r_i \in \mathbb{C}$
$r_1, r_2,\ \ldots\ , r_k$ étant des racines distinctes de multiplicités respectives $m_1, m_2,\ \ldots\ , m_k$.

Relation entre coefficients et racines dans le cas du trinôme du second degré

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - r_1)\,(x - r_2) \\ &= a(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\text{somme des racines} = r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$
$$\text{produit des racines} = r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$