

# Mécanique des solides déformables

Auteur  
Michel MAYA

## 5 – Elasticité linéaire

Ce cours est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons  
Paternité + Pas d'utilisation commerciale + Pas de modification 4.0 International



## 5-1

# ELASTICITE LINEAIRE

## Limites d'élasticité

1.

Avec la loi de comportement, nous avons maintenant tous les outils pour faire une étude mécanique complète. Nous allons faire ces études dans le cadre très courant, mais aussi très simple, de l'élasticité linéaire. Nous utiliserons cette loi de comportement en supposant que le milieu est isotrope ce qui simplifiera encore. Mais avant, il nous faut définir les limites d'utilisation d'une telle loi de comportement car il est évident que pour tout matériau dès lors que les sollicitations seront trop élevées, nous atteindrons un endommagement, voire une rupture.

2.

Nous avons établi des relations valables si le matériau est homogène, isotrope, si la transformation est continue, infinitésimale, monotherme réversible, si le domaine ne subit aucune transformation chimique, ni de changement d'état et si le comportement est linéaire.

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^0 + 2\mu \overline{\varepsilon} + \left( \lambda \operatorname{tr}(\overline{\varepsilon}) - \beta(T - T^0) \right) \overline{I} \quad \overline{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left( \overline{\sigma} - \overline{\sigma}^0 \right) + \left[ \alpha(T - T^0) - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\overline{\sigma} - \overline{\sigma}^0) \right] \overline{I}$$

Nous voyons clairement les contributions de l'état de contraintes initiales et de la température. Mais souvent on considérera que les contraintes initiales sont négligeables et la température est constante. Ce qui nous donne des formules encore plus simples.

$$\overline{\sigma} = 2\mu \overline{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\overline{\varepsilon}) \overline{I} \quad \overline{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \overline{\sigma} - \left[ \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\overline{\sigma}) \right] \overline{I}$$

Il est aussi possible de donner des formulations indicielles équivalentes. Le milieu étant isotrope, ces relations sont valables dans n'importe quelle base. Il convient de noter qu'il est possible de calculer l'état de contrainte à partir de la connaissance de l'état de déformation et inversement.

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Il est bien entendu que pour cette loi de comportement, seuls deux coefficients sont indépendants. Si bien que nous avons des relations entre les deux coefficients de Lamé, le module d'Young et le coefficient de Poisson. Il est à noter que souvent le premier coefficient de Lamé est appelé le module de Coulomb ou encore module d'élasticité transversal par opposition au module d'Young qui est aussi appelé le module d'élasticité longitudinal.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

3.

Ces différents coefficients sont essentiellement fonctions du matériau utilisé. Toutefois, ils peuvent aussi dépendre de paramètres comme par exemple la température. Les coefficients de Lamé et le module d'Young sont homogènes à des pressions et s'expriment généralement en gigapascal. Le coefficient de Poisson est adimensionnel.

Matériaux	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Masse Volumique (kg/dm <sup>3</sup> )
Acier de construction	210	0,285	7,8
Acier Inox 18-12	203	0,29	7,9
Fonte grise	90 à 120	0,29	7,1 à 7,2
Alliage TA6V	105	0,25	7,8
Aluminium	71	0,34	2,6
Zinc	78	0,21	7,15
Titane	105	0,34	4,5
Verre	60	0,25	2,8
Béton en compression	10 à 13	0,15	2 à 2,4
Caoutchouc	0,2	0,5	1,8
Bois (pin)	7	0,2	0,4
Marbre	26	0,3	2,8
Graphite	250 à 350	0,3 à 0,4	1,75 à 1,92
Elastomère	0,2	0,5	1

4.

Nous avons maintenant toutes les équations nécessaires pour trouver les inconnues mais parfois, pour un peu plus d'efficacité, nous pouvons utiliser des équations complémentaires obtenues par combinaison des équations de base. C'est le cas des équations de Navier qui traduisent le principe fondamental de la mécanique en fonction du champ de déplacement. Pour les obtenir, nous allons partir du principe fondamental de la mécanique exprimé de façon classique en contraintes, puis utiliser la loi de comportement pour avoir une expression en fonction des déformations. Enfin l'utilisation des relations déformations déplacements conduit au résultat escompté.

Nous partons donc de l'équation de résultante issue du principe fondamental de la mécanique :

$$\overline{\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})} + \rho(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{\gamma}}) = \underline{\underline{0}}$$

L'introduction de la loi de comportement élastique linéaire pour un matériau isotrope nous permet d'obtenir une nouvelle formulation :

$$2\mu \overline{\text{div}(\underline{\underline{\varepsilon}})} + \lambda \overline{\text{grad}(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}))} + \rho(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{\gamma}}) = \underline{\underline{0}}$$

Mais nous avons aussi des relations fondamentales issues de l'analyse tensorielle :

$$\overline{\text{div}(\underline{\underline{\varepsilon}})} = \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\mathbf{grad}(\underline{\underline{u}}))} + \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\mathbf{grad}(\underline{\underline{u}})^T)}$$

$$\overline{\text{div}(\underline{\underline{\varepsilon}})} = \frac{1}{2} \Delta(\underline{\underline{u}}) + \frac{1}{2} \overline{\text{grad}(\text{div}(\underline{\underline{u}}))}$$

$$\theta = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \text{div}(\underline{\underline{u}})$$

Ce qui nous permet d'obtenir la forme finale dite équations de Navier. Avec l'analyse tensorielle, nous pouvons en donner deux expressions équivalentes.

$$\mu \Delta(\vec{u}) + (\mu + \lambda) \overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) = \vec{0}$$

$$(\lambda + 2\mu) \overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))} - \mu \overline{\text{rot}(\text{rot}(\vec{u}))} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) = \vec{0}$$

On peut aussi apporter une démonstration en utilisant la notation indicielle. En travaillant dans une base cartésienne, on peut relier la dérivée des composantes du tenseur des contraintes aux dérivées des composantes du tenseur des déformations.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \delta_{ij} = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

Cela nous donne alors une expression indicielle traduisant le principe fondamental de la mécanique exprimé en déformations.

$$2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

Il nous suffit maintenant d'utiliser les relations entre le tenseur des déformations et le vecteur déplacement pour obtenir, en quelques étapes, la relation indicielle traduisant les équations de Navier.

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

Cette formulation indicielle est équivalente à la formulation tensorielle.

$$\mu \Delta u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

5.

On peut aussi en déduire une relation scalaire en appliquant l'opérateur divergence :

$$\mu \text{div}[\Delta(\vec{u})] + (\mu + \lambda) \text{div}[\overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))}] + \text{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] = 0$$

On peut alors utiliser des relations issues de l'analyse tensorielle :

$$\text{div}[\Delta(\vec{u})] = \Delta[\text{div}(\vec{u})]$$

$$\text{div}[\overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))}] = \Delta[\text{div}(\vec{u})]$$

Et en définitive on obtient une équation scalaire qui bien entendu ne remplace pas complètement les équations de Navier mais qui sera néanmoins parfois utilisée.

$$(2\mu + \lambda) \Delta[\text{div}(\vec{u})] + \text{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] = 0$$

A partir de cette équation, on constate que dans le cas d'un domaine à masse volumique constante, en équilibre et placé dans un champ de force à divergence nulle, le laplacien de la divergence du vecteur déplacement est nul.

$$\rho = cte, \quad \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad \text{div}(\vec{f}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta[\text{div}(\vec{u})] = \Delta\theta = 0$$

6.

Un autre lot d'équations supplémentaires est donné par les équations de Beltrami qui vont traduire en fonction des composantes du tenseur des contraintes les conditions de compatibilité des déformations.

Ces dernières ont une forme relativement complexe lorsqu'elles sont données en fonction du tenseur des déformations.

$$\text{grad} \overline{\text{div}(\underline{\underline{\varepsilon}})} + \left( \text{grad} \overline{\text{div}(\underline{\underline{\varepsilon}})} \right)^T - \text{grad} \left( \overline{\text{grad}[\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})]} \right) - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$$

Pour y introduire le tenseur des contraintes, nous utilisons la loi de comportement sous la forme des équations de Hooke.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \left[ \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \underline{\underline{I}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\Delta\sigma}} - \left[ \frac{\nu}{E} \Delta(\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})) \right] \underline{\underline{I}}$$

On peut, à partir de cette formulation, établir un lien entre les traces des tenseurs déformations et contraintes.

$$\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = I_1 = \frac{E}{1-2\nu} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{E}{1-2\nu} \theta \quad \Delta I_1 = \frac{E}{1-2\nu} \Delta\theta$$

On utilise ensuite la forme scalaire des équations de NAVIER

$$(2\mu + \lambda)\Delta\theta = \text{div}[\rho(\vec{\gamma} - \vec{f})] \quad \Rightarrow \quad \Delta I_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \text{div}[\rho(\vec{\gamma} - \vec{f})]$$

Nous avons aussi des formules d'analyse tensorielle

$$\overline{\text{div} \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1+\nu}{E} \overline{\text{div} \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\nu}{E} \overline{\text{grad}(I_1)}$$

$$\text{grad} \left( \overline{\text{div} \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) = \frac{1+\nu}{E} \text{grad} \left( \overline{\text{div} \underline{\underline{\sigma}}} \right) - \frac{\nu}{E} \text{grad} \left[ \overline{\text{grad}(I_1)} \right]$$

$$\left( \text{grad} \left( \overline{\text{div} \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) \right)^T = \frac{1+\nu}{E} \left( \text{grad} \left( \overline{\text{div} \underline{\underline{\sigma}}} \right) \right)^T - \frac{\nu}{E} \text{grad} \left[ \overline{\text{grad}(I_1)} \right]$$

Et pour compléter, on peut utiliser le principe fondamental de la mécanique

$$\overline{\text{div} \underline{\underline{\sigma}}} = \rho(\vec{\gamma} - \vec{f})$$

Ce qui nous permet d'obtenir une nouvelle formulation des équations de compatibilité

$$\text{grad} \left( \overline{\text{div} \underline{\underline{\sigma}}} \right) + \left( \text{grad} \left( \overline{\text{div} \underline{\underline{\sigma}}} \right) \right)^T - \frac{1}{1+\nu} \text{grad} \left( \overline{\text{grad}(I_1)} \right) - \Delta \underline{\underline{\sigma}} + \left( \frac{\nu}{1-\nu} \right) \text{div}[\rho(\vec{\gamma} - \vec{f})] \underline{\underline{I}} = \vec{0}$$

Equation qui peut aussi avoir une déclinaison sous forme indicielle

$$\frac{\partial[\rho(\gamma_i - f_i)]}{\partial x_j} + \frac{\partial[\rho(\gamma_j - f_j)]}{\partial x_i} - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \text{div}[\rho(\vec{\gamma} - \vec{f})] \delta_{ij} = 0$$

Comme dans le cas des équations de Navier, on obtient une formulation simplifiée dans le cas d'un domaine à masse volumique constante, en équilibre et placé dans un champ de force volumique à divergence nulle.

$$\rho = cte, \quad \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad \text{div}(\vec{f}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{1+\nu} \mathbf{grad}(\overline{\text{grad}(I_1)}) + \overline{\Delta \sigma} = \vec{0} \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} + \Delta \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

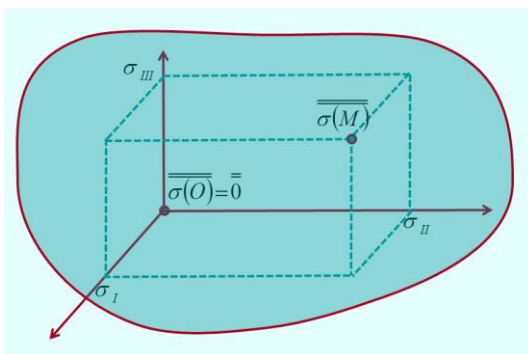
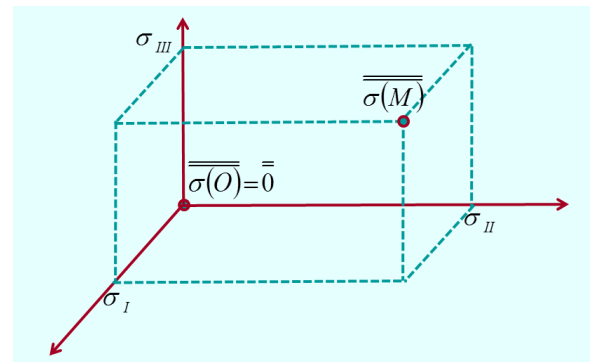
7.

Les études mécaniques que nous avons à faire ont pour but de dimensionner les structures en fonction des chargements appliqués. Mais, dans le but d'économie d'énergie, il faut éviter d'utiliser trop de matière, ce qui nous conduit à un dimensionnement à minima. Pour cela, il faut venir aux limites de comportement de notre matériau sans en dépasser les frontières. Cela nous conduit à exprimer ces frontières qui vont être déterminées par des expériences.

On pourrait définir ces frontières dans l'état de déformation, mais en fait on les exprime en fonction de l'état de contrainte. Comme nous avons vu que ce dernier était essentiellement déterminé dans une base principale par ses valeurs propres, on peut envisager que l'expression déterminant la frontière soit une relation entre les contraintes principales.

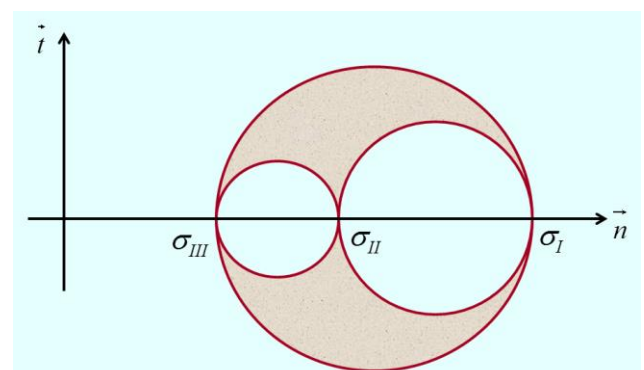
$$F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, c_1, c_2, \dots, c_n) \leq 0$$

Cela revient à dire que l'on peut travailler dans un espace tridimensionnel, les coordonnées sur les axes de bases étant les valeurs propres de l'état de contrainte étudié. Donc, pour chaque état de contrainte, on pourra associer un point dans cet espace. En particulier, le point origine du repère est associé à un état de contrainte nul.



Et dans cet espace, il existe une surface fermée, enfermant nécessairement le point origine, et définissant le domaine permmissif de l'état de contrainte. Tout point situé dans le domaine délimité par la surface fermée représente un état de contrainte autorisé. Mais lorsque ce point est situé sur la surface enveloppe, on peut considérer que nous sommes en état limite.

Le problème est que cette représentation est tridimensionnelle et donc difficilement exploitable. C'est la raison pour laquelle nous allons essayer de déterminer cette surface enveloppe dans une représentation bidimensionnelle, celle du plan de Mohr, plan dans lequel tout état de contrainte sera représenté par un tricercle.



8.

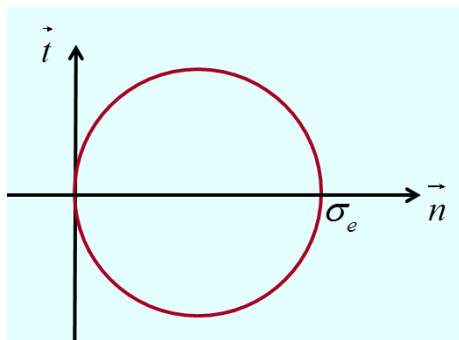
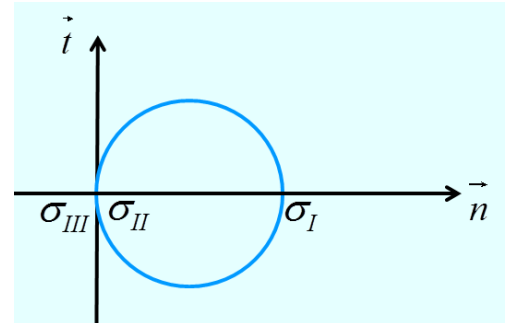
Pour déterminer cette surface enveloppe, nous allons nous appuyer sur les tests et expériences. Le résultat le plus simple à mettre en évidence est celui obtenu par un essai de traction uniaxial. Cet essai nous permet d'obtenir en certains points de l'éprouvette un tenseur des contraintes très simple, caractérisé par une seule valeur non nulle, celle de la contrainte normale dans la direction de traction.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

On obtient facilement les trois contraintes principales dont deux sont nulles.

$$\sigma_I = \sigma ; \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

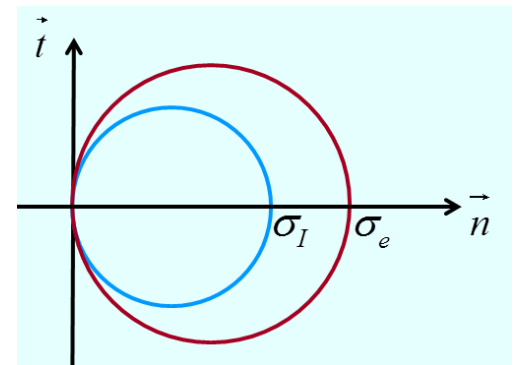
Cela nous donne un tricercale de Mohr très particulier puisque deux cercles sont confondus et que le troisième est un cercle de rayon nul positionné sur le point origine du repère.



Expérimentalement, on constate que lorsque l'on a atteint une certaine contrainte, dite limite d'élasticité en traction, notre matériau entre dans un domaine plastique caractérisé par des déformations irréversibles. Il existe donc un tricercale de Mohr limite caractérisé par cette limite d'élasticité en traction.

Donc, tant que notre contrainte de traction est inférieure à cette limite d'élasticité en traction, le domaine reste avec la loi de comportement élastique linéaire. En conséquence, tout état de traction uniaxial donnant un tricercale à l'intérieur du cercle précédent est considéré comme étant encore à loi de comportement élastique linéaire.

$$\sigma \leq \sigma_e \Rightarrow \sigma_I \leq \sigma_e$$

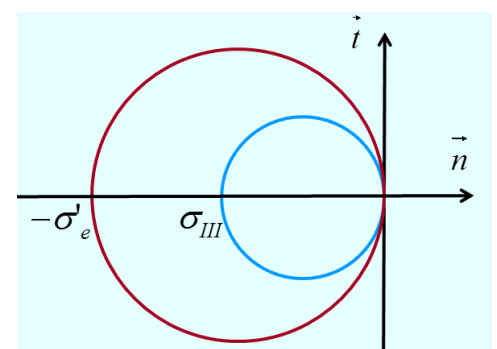


9.

De façon symétrique, on peut s'intéresser à l'essai de compression uniaxial d'une éprouvette. En certains points de l'éprouvette, le tenseur des contraintes se présente sous la même forme que dans le cas de la traction uniaxiale, mais cette fois la contrainte normale dans la direction de la sollicitation est négative.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

Le tricercale de Mohr se positionne alors dans la partie négative des contraintes normales.



Et l'on obtient aussi un tricerclé limite. En général, la limite d'élasticité en compression uniaxiale est, en valeur absolue, supérieure à la limite d'élasticité en traction uniaxiale.

$$\sigma \leq \sigma'_e \Rightarrow -\sigma_{III} \leq \sigma'_e$$

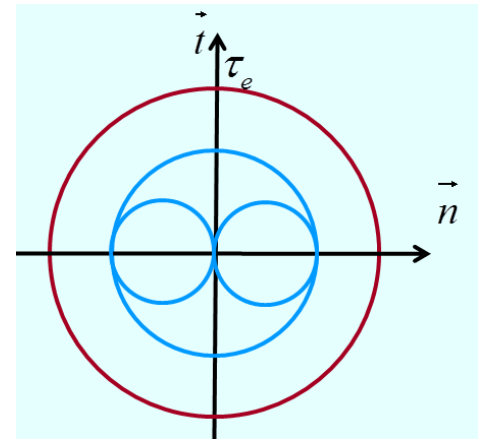
10.

Une sollicitation de cisaillement peut être obtenue par exemple dans le cas d'une éprouvette se présentant sous la forme d'un tube circulaire de faible épaisseur et sollicité en torsion. Dans un repère cylindrique naturel, le tenseur des contraintes ne fait alors apparaître qu'une composante tangentielle.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

On peut alors facilement préciser les composantes de ce tenseur contrainte dans la base des vecteurs propres.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} (\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III}) \quad (\sigma_I = \tau, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} = -\tau)$$



On peut en déduire la forme du tricerclé de Mohr.

En pratique, on constate à nouveau que, si l'on veut rester dans le domaine d'élasticité linéaire, la sollicitation imposée à l'éprouvette ne doit pas dépasser une certaine valeur limite, ce qui impose un rayon maximal au plus grand des cercles.

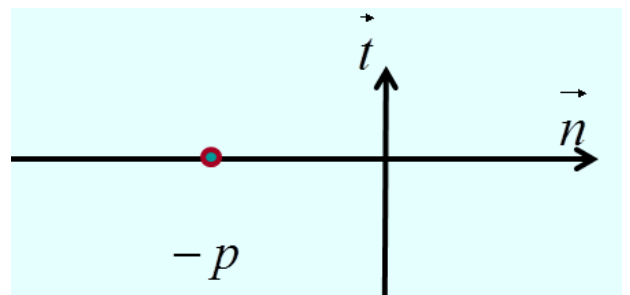
$$\tau \leq \tau_e$$

11.

La sollicitation de compression isotrope est obtenue en appliquant une pression uniforme sur la surface extérieure délimitant l'éprouvette d'étude. On obtient alors en tout point du domaine un tenseur contrainte proportionnel au tenseur d'identité.

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$$

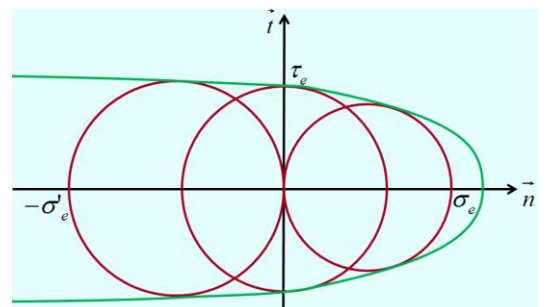
Le tricerclé de Mohr se réduit à un point placé sur l'axe normal du plan de Mohr dans la partie négative.



Concrètement on ne peut pas faire apparaître de limitation. Quelque soit la pression appliquée, lorsque qu'elle est supprimée, le domaine reprend sa forme et ses dimensions initiales. On est donc constamment dans le domaine élastique linéaire.

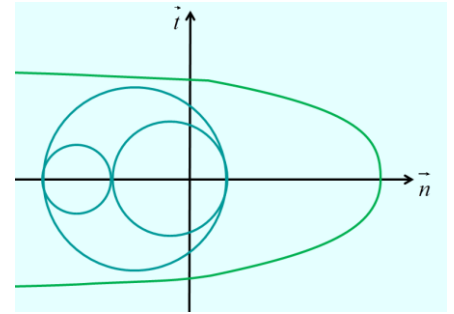
12.

On constate donc que, suivant la sollicitation, nous avons plusieurs réponses. Est-il possible, à partir de tous ces résultats d'uniformiser la réponse ? C'est la tentative du critère de limite élastique de Mohr Caquot. Pour l'exprimer il suffit de partir de l'ensemble des cercles limites précédemment obtenus.

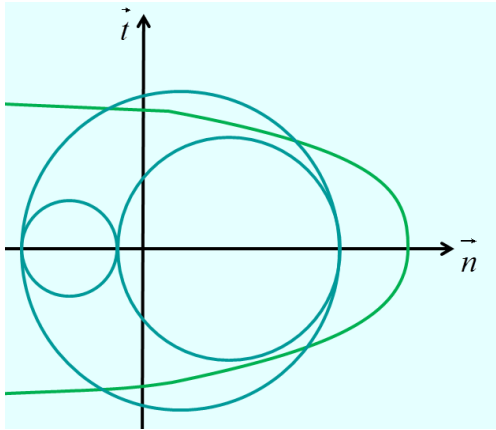




L'idée est que dans ce plan de Mohr, il existe une courbe enveloppe de toutes ces conditions limites et aussi d'autres obtenues avec des essais combinés comme par exemple de la traction torsion.



Dans le cas d'une sollicitation donnant un tricercler de Mohr à l'intérieur de la courbe enveloppe, le domaine reste dans le domaine élastique linéaire.



Par contre dès lors que le tricercler est séquent avec la courbe enveloppe, cela signifie que l'on est sorti de la loi de comportement élastique linéaire. Il faut alors soit reprendre les calculs avec une nouvelle loi de comportement, soit modifier le chargement ou la structure pour rester en dessous de la limite.

Cette solution de critère de limite élastique est certainement une bonne réponse mais il faut établir la courbe limite ce qui nécessite de nombreux essais et c'est trop onéreux pour être effectivement utilisé dans l'industrie. Il est préférable de trouver d'autres solutions pour établir les limites d'utilisation de la loi d'élasticité linéaire.

13.

Parmi ces autres solutions, le critère de Von Misès est l'un des plus fréquemment utilisé. L'idée est que le matériau ne peut emmagasiner de l'énergie de déformation que jusqu'à une certaine limite.

Nous connaissons l'expression différentielle de cette énergie de déformation.

$$dW_{def} = \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma}}} \otimes d\varepsilon dv = \int_D \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv$$

L'intégration est simple dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire qui traduit une proportionnalité entre l'état de contrainte et l'état de déformation

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma}}} \otimes \varepsilon dv$$

Mais une simple limitation de l'énergie de déformation ne permet pas de prendre en compte les résultats de l'essai de compression isotrope pour lequel il n'existe aucune limite de chargement. Cet essai se traduisant par un état de contrainte purement sphérique, sans partie déviatorique, il est suggéré de décomposer l'énergie de déformation en partie sphérique et en partie déviatorique. Il est à noter qu'il existe un découplage complet entre ces deux contributions.

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma}}_S} \otimes \varepsilon_S dv + \frac{1}{2} \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma}}_D} \otimes \varepsilon_D dv = (W_{def})_S + (W_{def})_D$$

Pour définir la limite d'élasticité, le critère de Von Misès se traduit par une inégalité.

$$\left( \frac{dW_{def}}{dv} \right)_D = \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{\sigma}}_D} \otimes \varepsilon_D = \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{tr}[(\sigma_{ij})_D (\varepsilon_{ij})_D]}} \leq K$$

En utilisant les résultats de l'essai de traction, on peut fixer la valeur de la constante limitant l'énergie de déformation déviatorique.

$$tr(\overline{\sigma_D}^2) \leq \frac{2}{3} \sigma_e^2$$

Ce qui nous donne une expression relativement simple en fonction des contraintes principales.

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \leq 2\sigma_e^2$$

Un autre critère peut être obtenu en considérant que c'est essentiellement le cisaillement qui est générateur de déformations plastiques. Ainsi, il apparaît naturel de limiter la valeur de la contrainte tangentielle maximale qui correspond en fait au rayon du plus grand des cercles de Mohr. On obtient alors le critère de Tresca.

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \leq \tau_e$$

Ces critères sont très simples à établir et très simples à mettre en œuvre. On obtient des expressions numériques qui peuvent facilement être traitées dans des logiciels de calcul. Mais bien entendu, ces simplicités se traduisent par des pertes en efficacité et il existe des cas où ces critères sont pris en défaut. Mais en général, ces cas correspondent à des états ayant des composantes très fortes en traction isotrope, sollicitations très dures à obtenir et très peu fréquentes dans la réalité. Dans les domaines à fortes composantes de compression, ces critères sont en général sécurisants.

14.

Comme nous venons de le constater, nous avons des limites naturelles pour l'utilisation d'une loi de comportement. Les expériences vont nous permettre de déterminer ces limites. Lors des calculs, il faudra bien entendu s'assurer que ces limites soient bien respectées.

## ELASTICITE LINEAIRE

### Schémas de résolution

1.

A priori, nous avons maintenant tous les outils pour traiter un problème de mécanique. Pour arriver à cela nous avons utilisé beaucoup d'hypothèses simplificatrices. Hélas, nous allons nous rendre compte que souvent cela ne sera pas suffisant et que nous ne pourrons trouver des solutions analytiques exactes que dans très peu de cas.

2.

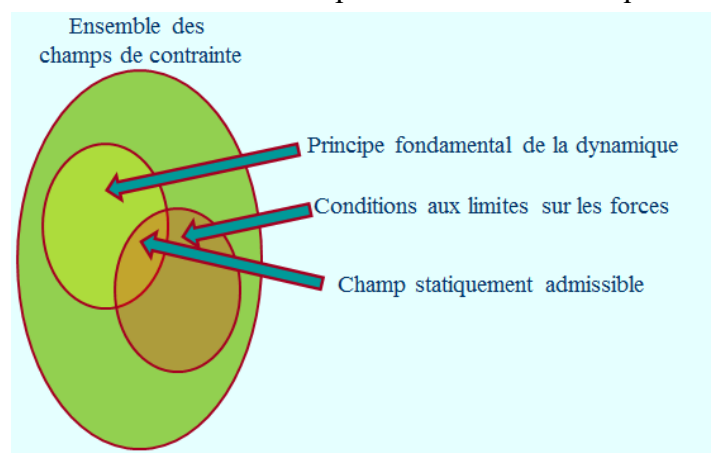
Nous avons à déterminer 15 fonctions scalaires. Les trois composantes du vecteur déplacement, les six composantes du tenseur des déformations et les six composantes du tenseur des contraintes. Dans le cas d'un comportement solide, la masse n'est pas vraiment une inconnue.

A notre disposition, nous avons 15 équations. Les relations scalaires entre le vecteur déplacement et le tenseur des déformations sont au nombre de six. L'équation de résultante issue du principe fondamental de la mécanique nous apporte 3 conséquences scalaires. Enfin nous avons complété avec les six équations issues de notre loi de comportement. L'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse est surtout utile pour des éléments fluides ou gazeux, mais elle présente très peu d'intérêt dans le cas d'un comportement solide. Toutefois, même si nous avons le bon nombre d'équations vis-à-vis du nombre d'inconnues, il nous reste une difficulté de taille. Ces équations ne sont pas linéaires, mais différentielles et il n'est malheureusement pas possible de les résoudre analytiquement. On peut par exemple utiliser une méthode numérique utilisant les éléments finis et l'ordinateur pour donner des réponses approchées. Mais il est nécessaire de caler ce procédé numérique et pour cela, il est bien de connaître, au moins pour quelques cas particuliers, des réponses analytiques.

3.

La détermination de ces solutions nécessite des simplifications, mais elle est aussi basée sur le fait que la réponse existe et est unique. C'est le cas lorsque l'on associe un champ de contrainte statiquement admissible à un champ de déformation cinématiquement admissible. Regardons ce qui se cache derrière ces nouveaux vocables.

Considérons l'ensemble des champs de contraintes. Dans cet ensemble, certains ne respectent pas le principe fondamental de la mécanique, mais bien entendu nous nous intéresserons tout spécialement à ceux qui sont en accord avec ce principe. D'autre part, nous avons aussi un sous ensemble désignant les champs de contraintes en cohérence avec les conditions de chargement imposées sur la surface du domaine étudié.

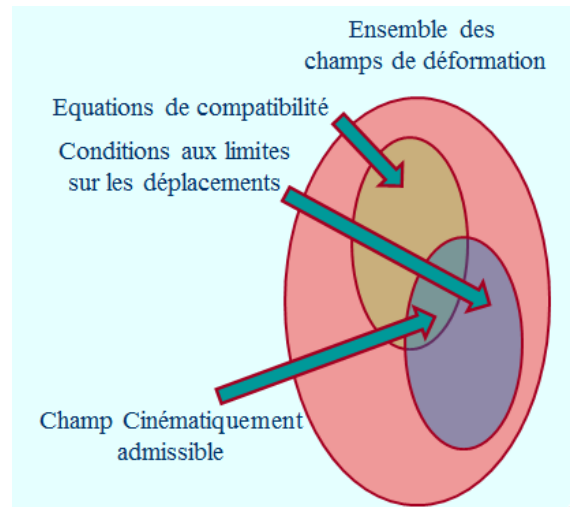


Et bien entendu le champ de contrainte que nous recherchons doit satisfaire à ces deux conditions. Tous les champs de contrainte dans ce cas sont dits statiquement admissibles

4.

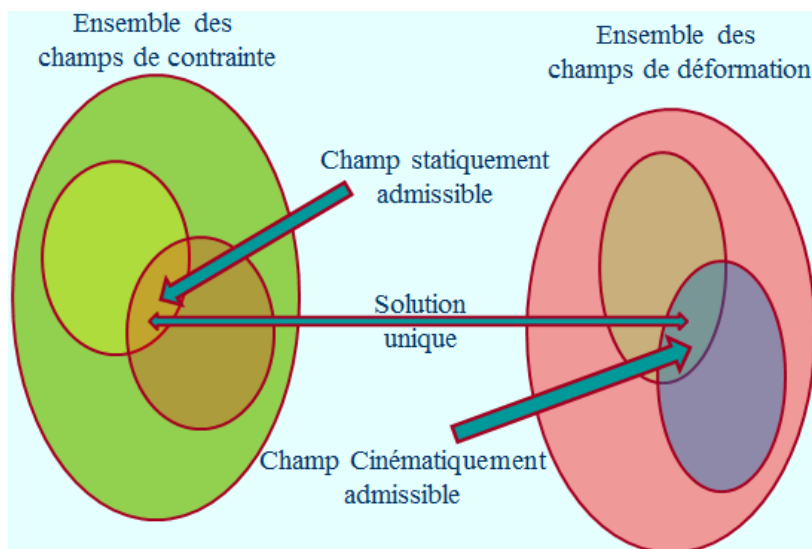
De façon duale, on peut s'intéresser à l'ensemble des champs de déformation.

Il y a un sous ensemble qui représente les champs de déformations en accord avec les conditions de compatibilités. Et puis il y a aussi un sous ensemble dans lequel on retrouve les champs de déformation permettant de satisfaire aux conditions aux limites sur les déplacements imposés en surface du domaine d'étude. A nouveau, seuls les champs de déformation respectant ces deux conditions sont ceux qui nous intéressent. On parle alors de champs de déformation cinématiquement admissibles.



Par l'intermédiaire de la loi de comportement, on peut définir de nombreux couples entre ces deux grands ensembles. Dans le cas d'un problème pour lequel en chaque point de la surface délimitant le domaine on peut définir soit le chargement, soit le déplacement, on démontre qu'il n'existe qu'un seul couple constitué par un tenseur contrainte statiquement admissible et un tenseur déformation cinématiquement admissible, ces deux états tensoriels étant reliés entre eux par la loi de comportement.

C'est le théorème d'unicité de la solution. La démonstration de ce théorème peut se faire par l'absurde. En effet, si l'on admet qu'il existe deux solutions différentes pour une sollicitation donnée, en appliquant le théorème de superposition et en faisant la différence entre ces deux solutions, on obtient un état de contrainte non nul pour une sollicitation nulle.



5.

Avec ce théorème d'unicité, nous pouvons envisager une méthode de détermination de solution d'un problème de mécanique basée sur la notion de schémas de résolution. L'idée est de partir d'hypothèses spécifiques à l'étude, hypothèses permettant de réduire le nombre d'inconnues et de paramètres. Par exemple dans un problème parfaitement axisymétrique, on pourra considérer que l'angle de position angulaire n'est pas un paramètre de ce problème. Ensuite, on essaie de démontrer que ces hypothèses permettent d'avoir un champ de contrainte statiquement admissible associé par l'intermédiaire de la loi de comportement à un champ de déformation cinématiquement admissible. Ce qui implique quelques calculs et vérifications. Si l'on peut obtenir un tel binôme, alors, par le théorème d'unicité, on peut affirmer détenir la solution du problème. Il existe plusieurs schémas de résolution possible.

On peut par exemple formuler des hypothèses sur l'état de contrainte.

Ensuite on vérifie le principe fondamental de la mécanique.

Si les hypothèses émises ne permettent pas de respecter ce principe, il faut les revoir.

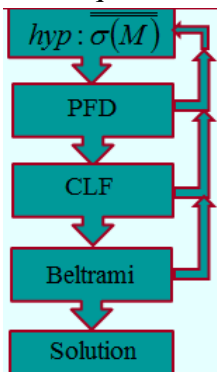
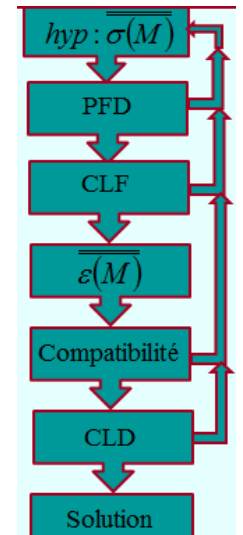
Par contre, si nous n'avons pas d'incompatibilité, on peut poursuivre en testant le respect des conditions aux limites sur les forces imposées en surface du domaine.

Dans le cas où ce test est positif, le tenseur des contraintes étant statiquement admissible, on peut alors passer au calcul des composantes du tenseur des déformations en utilisant la loi de Hooke.

Puis on regarde si le tenseur obtenu respecte les équations de compatibilités.

Enfin, on termine en test les conditions aux limites en déplacements imposés.

Si tous ces deux derniers tests sont positifs, le tenseur des déformations étant cinématiquement admissible, alors on détient la solution de notre problème.



Il est à noter que ce schéma de résolution peut être simplifié si nous n'avons aucune condition aux limites sur les déplacements.

En effet dans ce cas, on peut se contenter de valider les équations de compatibilité en les vérifiant sous forme de contrainte, c'est-à-dire en employant les équations de Beltrami.

On peut aussi avoir un schéma de résolution en formulant des hypothèses sur le champ de déplacement.

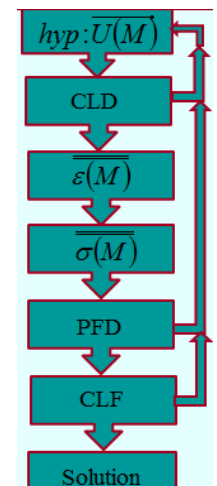
Ensuite, on vérifie les conditions aux limites sur les déplacements.

Puis on peut calculer les composantes du tenseur des déformations. Comme ce tenseur est obtenu à partir d'un champ de déplacement, il n'est pas nécessaire de vérifier les équations de compatibilités. A ce stade, l'état de déformation est cinématiquement admissible.

On peut alors définir le tenseur des contraintes par utilisation des lois de Lamé.

On peut alors tester le principe fondamental de la mécanique.

Et terminer en vérifiant les conditions aux limites sur les forces.



Si tous les tests sont positifs, on détient la solution du problème. Si, à partir des hypothèses émises, il n'est pas possible de vérifier l'un des tests du schéma utilisé, il faut alors revoir ces hypothèses.

6.

Regardons comment cette méthode nous permet de trouver l'état de contrainte et de déformation dans le cas d'un corps homogène de forme quelconque sollicité par une pression constante appliquée sur sa surface extérieure. En imposant cette pression, on constate que le corps ne change pas de forme, mais simplement de volume. Ce constat va nous permettre de construire notre schéma de résolution.

L'hypothèse de départ sera faite sur l'état de déformation. Le fait qu'il n'y ait pas de changement de forme dans l'application du chargement nous conduit à imaginer que la partie déviatorique du tenseur des déformations est nulle.

$$\overline{\overline{\varepsilon_D(M)}} = 0$$

Donc notre tenseur déformation est purement sphérique, c'est-à-dire proportionnel au tenseur identité. A priori, le coefficient de proportionnalité est dépendant du point d'étude.

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \overline{\overline{\varepsilon_S(M)}} + \overline{\overline{\varepsilon_D(M)}} = \overline{\overline{\varepsilon_S(M)}} = k \overline{\overline{I}} \quad k = k(M)$$

Ne pouvant guère faire autre chose, nous allons regarder ce que cela donne sur le tenseur des contraintes. Ce dernier est obtenu par application de la loi de Lamé.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{I}}$$

La trace du tenseur déformation est très simple à obtenir et au final on constate que le tenseur des contraintes est lui aussi proportionnel au tenseur identité.

$$\text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) = 3k \quad \overline{\overline{\sigma(M)}} = (2\mu + 3\lambda)k \overline{\overline{I}}$$

On peut maintenant regarder ce que nous donne le principe fondamental de la mécanique.

$$\overline{\overline{\text{div}(\sigma)}} + \rho \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

Le domaine est en équilibre donc le terme associé à l'accélération est nul.

$$\vec{\gamma} = \vec{0}$$

D'autre part, comme le seul chargement est celui imposé par la pression sur la surface du domaine, on peut considérer que les actions volumiques à distance sont nulles ;

$$\vec{f} = \vec{0}$$

Le principe fondamental de la mécanique nous permet de dire que la divergence du tenseur des contraintes est nulle. Cela nous conduit à trois conséquences scalaires qui montrent que ce tenseur des contraintes est le même en tout point du domaine.

$$\overline{\overline{\text{div}(\sigma)}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow k = cte$$

On peut s'intéresser à la condition aux limites sur les forces qui se traduit par le fait qu'un tout point de la surface extérieure du domaine,

$$\overline{\overline{T(M; \vec{n})}} = -p \vec{n}$$

Le vecteur contrainte selon la normale extérieure au domaine est égal au vecteur pression appliqué en ce point.

$$\overline{\overline{T(M; \vec{n})}} = \overline{\overline{\sigma}} \vec{n} = (2\mu + 3\lambda)k \vec{n} = -p \vec{n}$$

Cela nous permet de déterminer la valeur de la constante

$$k = -\frac{p}{2\mu + 3\lambda}$$

Avec ces deux conditions de vérifiées, le tenseur des contraintes est statiquement admissible. Il faut s'assurer que le tenseur des déformations est cinématiquement admissible. Pour cela il doit vérifier les équations de compatibilité. Bien que ces équations aient une forme assez compliquée, la vérification est immédiate et évidente car le tenseur des déformations est constant et que les termes intervenants dans ces équations sont des dérivées secondes des composantes de ce tenseur.

$$\overline{\overline{\text{grad div}(\varepsilon)}} + \left( \overline{\overline{\text{grad div}(\varepsilon)}} \right)^T - \overline{\overline{\text{grad} \left( \text{grad} \left[ \text{tr}(\varepsilon) \right] \right)}} - \Delta \overline{\overline{\varepsilon}} = 0$$

Maintenant, il faudrait regarder les conditions aux limites portant sur les déplacements imposés en surface du domaine, mais en fait nous n'en avons pas donc elles ne sont pas déterminantes pour l'étude.

On peut alors affirmer détenir la solution de notre problème. On constate que cette solution nous donne une expression très simple du tenseur des contraintes.

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$$

7.

Nous venons d'établir une méthode qui permet d'avoir une solution analytique dans des cas simples. Elle est essentiellement basée sur le théorème d'unicité de la solution.



## 5-3

# ELASTICITE LINEAIRE

## Coordonnées cylindriques

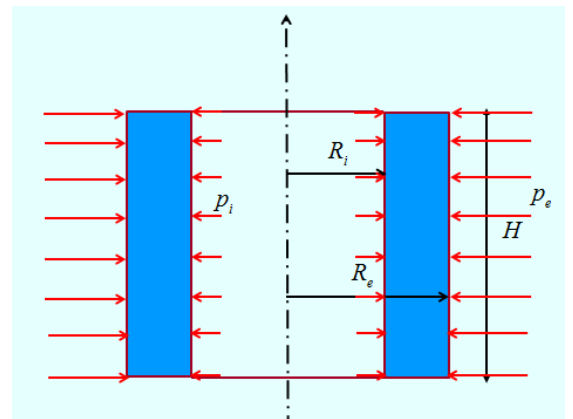
1.

Jusqu'à présent toutes nos relations ont été utilisées dans un système de coordonnées cartésiennes. C'est une solution qui donne toujours des résultats, mais ce n'est pas toujours le meilleur choix. Selon la géométrie du domaine et du chargement, il peut être utile de travailler dans un système curviligne.

2.

En seconde application, on peut essayer de trouver la solution d'une enveloppe sous pression. Il s'agit d'un tube à section droite circulaire, de longueur limitée. Du point de vue dimensionnel, il est caractérisé par un rayon intérieur  $R_i$ , un rayon extérieur  $R_e$  et une hauteur  $H$ .

Pour tout chargement, sur la paroi cylindrique intérieure est appliquée une pression  $P_i$  alors qu'il y a une pression  $P_e$  appliquée sur la paroi cylindrique extérieure.



3.

Avec ce chargement, il y aura bien évidemment des déformations et celles-ci vont essentiellement être occasionnées par les déplacements radiaux constatés en tout point de la matière. Aussi, nous allons nous placer dans un repère cylindrique naturel pour faire l'hypothèse que les composantes orthoradiale et axiale du champ de déplacement sont nulles.

$$\vec{U}(\vec{M}) = u_r \vec{E}_r + u_\theta \vec{E}_\theta + u_z \vec{E}_z = u_r \vec{E}_r$$

D'autre part, pour des raisons de symétrie, on considère que les variables de position angulaire et axiale ne sont pas des variables d'état. En conséquence, la composante radiale de déplacement n'est fonction que du rayon du point considéré. Avec ces hypothèses, au lieu d'avoir un champ de déplacement caractérisé par trois fonctions scalaires chacune dépendant de trois variables de positionnement, nous nous retrouvons avec une seule fonction scalaire ne dépendant que d'une seule variable. Il reste donc à vérifier si avec ces hypothèses nous obtenons un champ de déformation cinématiquement admissible associé par la loi de comportement à un champ de contrainte statiquement admissible.

$$u_r(r, \theta, z) = u_r(r)$$

Pour cela, nous allons tout d'abord calculer les composantes du tenseur des déformations. Ce dernier représente la partie symétrique du tenseur gradient du champ de déplacement. Pour utiliser correctement cette relation, on peut exprimer les composantes du champ de déplacement en coordonnées cartésiennes et utiliser les relations indicelles déjà vues. Mais on peut aussi utiliser la déclinaison des relations déplacements déformations en coordonnées cylindriques (cf annexe en fin du document). On remarque que, contrairement à ce que l'on peut imaginer de prime abord, la dilatation linéaire dans la direction circonférentielle n'est pas nulle. Toutefois après réflexion, on réalise que c'est normal, la circonférence évoluant en fonction des valeurs de pression.



$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \frac{1}{2} \left[ \text{Grad } \vec{U} + (\text{Grad } \vec{U})^T \right]$$

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{d u_r}{dr} ; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

Il est à noter que, comme nous n'avons aucune condition aux limites imposant des déplacements, le tenseur des déformations est cinématiquement admissible. Pour le calcul du tenseur des contraintes, on utilise les formules de Lamé

$$\overline{\overline{\sigma}} = 2 \mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{I}}$$

Cela nous donne les composantes du tenseur des contraintes. Comme nous sommes dans les directions principales, on obtient un tenseur diagonal. Bien entendu, tout est fonction de la composante radiale du champ de déplacement. On constate aussi que la contrainte normale axiale n'est pas nulle.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2 \mu \frac{d u_r}{dr} + \lambda \left( \frac{d u_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = 2 \mu \frac{u_r}{r} + \lambda \left( \frac{d u_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{zz} = \lambda \left( \frac{d u_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) \end{cases}$$

4.

Pour valider cette solution, nous devons vérifier que le tenseur des contraintes que nous venons d'obtenir est statiquement admissible. Pour cela, commençons par regarder si le principe fondamental de la mécanique est satisfait sous la forme locale. Le domaine étant en équilibre, le vecteur accélération est nul. Il en est de même pour le vecteur représentant les actions à distance car nous n'avons aucune force de volume imposée. L'équation locale de la résultante du principe fondamental de la mécanique prend alors une forme simple.

$$\overline{\overline{\text{div}(\sigma)}} + \rho \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \Rightarrow \overline{\overline{\text{div}(\sigma)}} = \vec{0}$$

Bien entendu, pour traduire correctement cette équation, il est bon de prendre les expressions en coordonnées cylindriques ce qui apporte à nos projections sur le système d'axe des composantes non triviales. De ces trois projections, on peut remarquer que seule la première nous apporte des éléments intéressants, les deux autres étant automatiquement satisfaites.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On exprime ensuite cette première équation en fonction des composantes du champ de déplacement. Cela nous conduit à une équation différentielle du second ordre vis-à-vis de la composante radiale du champ de déplacement.

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{d(r u_r)}{dr} \right) \right] = 0$$

La résolution de cette équation différentielle nous conduit aux formes de déplacements cohérents avec le principe fondamental de la mécanique. Elles sont définies par deux constantes d'intégration.

$$u_r = \alpha r + \frac{\beta}{r}$$

Il est alors possible de calculer les composantes du tenseur des contraintes.

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2\alpha(\mu + \lambda) \\ B = 2\beta\mu \\ C = 2\alpha\lambda \end{cases}$$

Pour s'assurer que le tenseur des contraintes est statiquement admissible, il nous suffit de vérifier les conditions aux limites en efforts imposés sur les surfaces du domaine. Il faut traduire les applications de pression sur les surfaces cylindriques intérieures et extérieures, ce qui nous donne deux conditions vectorielles.

$$\text{Pour } r = R_i \Rightarrow T(\overrightarrow{M}; -\overrightarrow{E}_r) = -p_i(-\overrightarrow{E}_r) = p_i \overrightarrow{E}_r$$

$$\text{Pour } r = R_e \Rightarrow T(\overrightarrow{M}; \overrightarrow{E}_r) = -p_e(\overrightarrow{E}_r) = -p_e \overrightarrow{E}_r$$

5.

Avec ces conditions, on peut alors calculer les constantes d'intégration, en particulier celles associées aux composantes du tenseur des contraintes.

$$\begin{cases} A = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ B = \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir les deux constantes d'intégrations définissant le champ de déplacement :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{A}{2(\mu + \lambda)} = \frac{1}{2(\mu + \lambda)} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ \beta = \frac{B}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{cases}$$

Ayant calculé toutes les constantes, on pourrait croire avoir terminé et conclure sur ce résultat. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'il est important de bien traduire toutes les conditions aux limites. En l'occurrence, il faut utiliser le fait que les surfaces extrémités de notre cylindre ne sont pas chargées, ce qui nous donne des conditions vectorielles supplémentaires

$$\text{Pour } z = 0 \Rightarrow T(\overrightarrow{M}; -\overrightarrow{E}_z) = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = H \Rightarrow T(\overrightarrow{M}; \overrightarrow{E}_z) = \vec{0}$$

Celles-ci donnent une seule relation concernant les constantes. Mais ce résultat est bien évidemment incompatible avec les précédents. Cela signifie que nos hypothèses de départ ne sont pas bonnes. Après réflexion, il apparaît qu'en fait le champ de déplacement doit avoir une composante axiale qui est due essentiellement aux effets du coefficient de Poisson. Le lecteur resté sur sa faim au niveau de cette application pourra reprendre l'étude en considérant que le champ de déplacement a deux composantes : une composante radiale uniquement fonction du rayon et une composante axiale uniquement fonction de la position axiale du point.

$$\sigma_{zz} = C = 2\alpha \lambda = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

6.

Cette étude a montré qu'il y avait une certaine complexité à travailler dans un système de coordonnées cylindriques, mais il faut bien réaliser que la même étude aurait été beaucoup plus délicate à mener dans un système de coordonnées cartésiennes. Il est donc essentiel de savoir appliquer les bonnes formules au bon moment. D'autre part, nous avons vu qu'il était important de bien vérifier toutes les conditions imposées au domaine si l'on voulait être certain de détenir la bonne réponse au problème posé. Concrètement, nous avons maintenant tous les outils nécessaires à notre disposition pour traiter des problèmes de mécanique des solides déformables liés à une loi de comportement élastique linéaire. Il ne reste donc plus qu'à utiliser ces outils et à travailler.

## 5-4

# ELASTICITE LINEAIRE

## Application

### Enoncé

#### 1 - Etude d'une enveloppe cylindrique sous pression

Imaginons que nous ayons à définir la solution d'un tube sollicité par une pression intérieure  $p_i$  au rayon  $R_i$ , une pression extérieure  $p_e$  au rayon  $R_e$  et une traction  $\sigma$  sur les surfaces extrémités. La longueur totale du domaine est  $L$ .

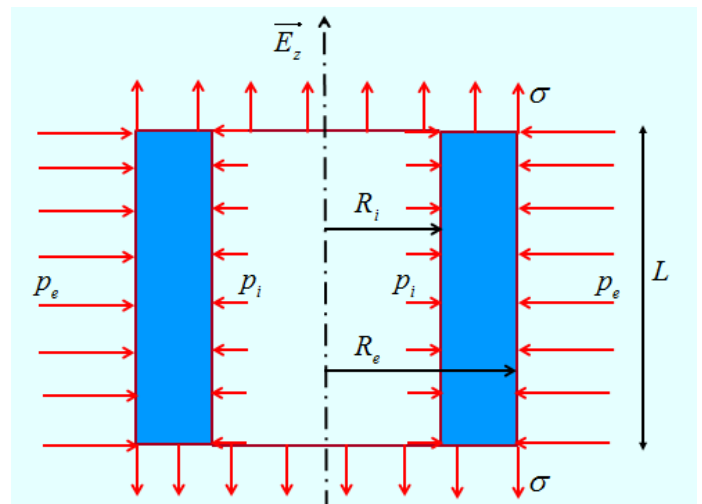
Il est possible de faire des hypothèses sur les composantes du champ de déplacement. En effet, vu les symétries du problème, on peut raisonnablement penser que le champ de déplacement n'a pas de composantes orthoradiales, que la composante radiale ne dépend que de la coordonnée radiale et que la composante axiale n'est fonction de la coordonnée axiale. On suppose que, dans la base cylindro-polaire, le champ de déplacement est de la forme :

$$\vec{U}(M) = u_r(r)\vec{E}_r + u_z(z)\vec{E}_z$$

1-1 Définir en tous points du domaine l'état de contrainte en fonction du chargement et des données dimensionnelles.

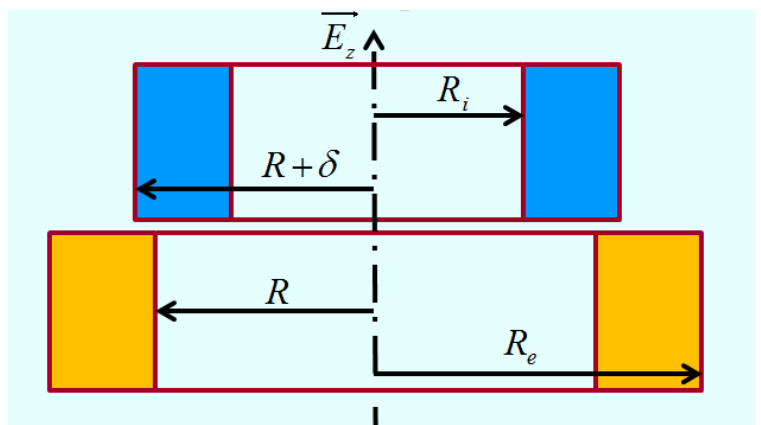
1-2 Que deviennent les composantes du tenseur des contraintes dans la base principale lorsque la sollicitation de traction sur les surfaces extrémités est nulle.

1-3 Quelle doit être la valeur de la contrainte de traction si l'on veut que la longueur du domaine  $L$  soit invariante.



#### 2- Etude d'un tube double (matériaux identique) fretté

A partir des résultats précédents, on peut étudier l'état de contrainte et de déformation au sein d'un assemblage cylindrique fretté. Les données du problème sont les suivantes. Un tube (numéro 1), de matériau élastique linéaire caractérisé par un module d'Young  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$ , de longueur finie  $L$ , de rayon intérieur



$R_i$  et de rayon extérieur  $R+\delta$  est pris dans un tube (numéro 2), de matériau élastique linéaire identique au précédent, de même longueur  $L$ , de rayon intérieur  $R$  et de rayon extérieur  $R_e$ . On appelle  $\delta$  le serrage. Cet assemblage crée une pression  $P$  à l'interface (rayon  $R$ ).

2-1 Quelle est la valeur de la pression à l'interface ?

2-2 Que devient cette valeur dans le cas de l'application d'une pression  $P_i$  sur la surface intérieure (rayon  $R_i$ ) et d'une pression  $P_e$  sur la surface extérieure (rayon  $R_e$ ) ?

### **3- Etude du canon parisien**

Injustement appelé « La Grosse Bertha », les Pariser Kanonen (canon parisien) furent utilisés en 1918 pour envoyer des projectiles de 125 kg (poids de l'obus de l'ordre de 400 kg avec poudre et accessoire) sur la capitale. Ces canons avaient une portée de l'ordre de 120 km. La vitesse initiale du projectile était de l'ordre de 1,5 km/s et ces projectiles atteignaient l'altitude de 40 km. La trajectoire était ainsi en partie dans la stratosphère ce qui limitait les frottements dû à l'air. Pour atteindre de telles performances, le fût du canon, d'une longueur impressionnante de 34 m, avait un alésage intérieur de l'ordre de 240 mm de diamètre et la pression maximale occasionnée par l'explosion de la poudre était de 4 000 bar. Il est à noter que ce diamètre intérieur augmentait au fur et à mesure des tirs (en fait il évoluait de 210 à 240 mm) et qu'il était nécessaire de refaire le tube au bout de 65 tirs. Dans la partie la plus sollicitée du fût (le tonnerre), le diamètre extérieur était de 960 mm. On admet que le matériau a un module d'Young  $E = 210$  GPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

3-1 Quelle doit être la limite élastique de l'acier utilisé si l'on ne veut pas entrer dans le domaine plastique?

3-2 Afin de réduire cette limite élastique, on envisage de réaliser le tube en fretage. On imagine donc avoir un premier tube avec un rayon intérieur  $R_i = 120$  mm et un rayon extérieur légèrement supérieur au rayon d'interface de  $R = 360$  mm. Le deuxième tube a un rayon intérieur égal au rayon d'interface et un rayon extérieur  $R_e = 480$  mm. Quelle doit être la limite élastique de l'acier utilisé pour les valeurs de serrage au rayon suivantes :  $\delta = 0,5$  mm ;  $\delta = 1$  mm ;  $\delta = 1,5$  mm ?

**15.**

Pour conclure notre enseignement sur la mécanique des solides déformables, nous allons traiter une application concernant le frettage de deux tubes. L'idée est de montrer l'intérêt de cette technique qui peut s'apparenter à une technologie de pré-contrainte.

**16.**

Voici l'énoncé de l'exercice. Les auditeurs sont invités à apporter des réponses de façon autonome puis à valider la solution en regardant les réponses proposées. Dans un premier temps, nous allons reprendre le cas d'une enveloppe cylindrique sous pression en ajoutant une sollicitation de traction aux extrémités du cylindre.

Puis, à partir des résultats précédemment obtenus, nous traiterons un problème de frettage de deux corps cylindriques. L'objectif est de démontrer qu'une telle opération permet de mieux résister à une sollicitation de pression.

Pour terminer par une application numérique, nous examinerons le cas de certains canons utilisés lors de la grande guerre. Ils étaient de dimensions impressionnantes pour des capacités hélas tout aussi impressionnantes.

**17.**

Essayons de valider nos hypothèses. Dans un premier temps on peut remarquer que comme dans notre problème nous n'avons aucune condition de déplacement imposé sur la surface de notre domaine et que d'autre part nous partons d'un champ de déplacement, le champ de déformation associé sera nécessairement cinématiquement compatible.

Il reste à vérifier que le champ de contrainte associé soit statiquement admissible. En ce qui concerne les équations d'équilibre, on pourrait être tenté d'utiliser les équations de Navier, mais il faudra ensuite déterminer les composantes du tenseur des contraintes afin de valider les conditions aux limites sur les forces.

$$\begin{aligned} \mu \overline{\Delta(\vec{u})} + (\mu + \lambda) \overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) &= \vec{0} \\ (\lambda + 2\mu) \overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))} - \mu \overline{\text{rot}(\text{rot}(\vec{u}))} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Aussi autant calculer immédiatement les composantes du tenseur des contraintes. Pour cela il faut utiliser les relations déplacement – déformation afin d'obtenir les composantes du tenseur des déformations. Attention les calculs doivent se faire dans la base cylindro-polaire et les formules utilisant les opérateurs différentiels (gradient, divergence, laplacien ...) n'ont pas les mêmes expressions indicielles que dans le cas d'une base cartésienne. Il est à noter qu'avec ces hypothèses les distorsions angulaires sont nulles, ce qui est logique si on imagine la déformation du tube. Nous sommes avec les axes principaux.

$$\overline{\varepsilon(M)} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T \right] \quad \overline{\varepsilon(M)} = \begin{pmatrix} \frac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{du_z}{dz} \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

**18.**

Comme la loi de comportement élastique linéaire est définie pour un matériau isotrope, elle peut être utilisée sous la même forme indicelle dans n'importe quelle base. On peut alors calculer facilement les composantes du tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \theta \overline{\overline{I}}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{du_r}{dr} + \lambda \theta & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \frac{du_z}{dz} + \lambda \theta \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z) \quad \theta = \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz}$$

Il reste maintenant à vérifier que le tenseur obtenu est bien statiquement admissible. Pour cela commençons par valider les équations d'équilibre, toujours en faisant bien attention à utiliser des formules valables en coordonnées cylindro-polaire. Comme le domaine est supposé être en équilibre et que les forces de volumes sont négligeables, le tenseur des contraintes doit avoir une divergence nulle :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}}(M) = \vec{0}$$

Compte tenu du fait que le tenseur des contraintes est diagonal, nous obtenons trois équations différentielles, mais en fait la deuxième est automatiquement satisfaite du fait que l'angle polaire n'est pas une variable d'étude.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

**19.**

Avec les hypothèses faites, la deuxième équation est identiquement satisfaite. La première et la troisième équation nous apportent deux équations différentielles.

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{d|r u_r|}{dr} \right) \right] = 0 \\ \frac{d^2 u_z}{dz^2} = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont dès lors rapides à obtenir.

$$\begin{cases} u_r = \alpha r + \frac{\beta}{r} \\ u_z = \gamma z + \delta \end{cases}$$

**20.**

Ce qui nous donne les expressions suivantes pour les composantes du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2\alpha(\mu + \lambda) + \gamma\lambda \\ B = 2\beta\mu \\ C = 2\alpha\lambda + \gamma(2\mu + \lambda) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{(2\mu + \lambda)A - \lambda C}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \\ \beta = \frac{B}{2\mu} \\ \gamma = \frac{(\mu + \lambda)C - \lambda A}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \end{cases}$$

Les constantes d'intégration peuvent aussi être définies à partir du module d'Young et du coefficient de Poisson :

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha + \gamma\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E \\ B = \frac{\beta}{1 + \nu} E \\ C = \frac{2\alpha\nu + \gamma(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1 - \nu}{E} A - \frac{\nu}{E} C \\ \beta = \frac{1 + \nu}{E} B \\ \gamma = -\frac{2\nu}{E} A + \frac{1}{E} C \end{cases}$$

### 21.

Avec les conditions aux limites, il est possible de fixer les constantes d'intégration. On connaît les valeurs du vecteur contrainte en chaque point appartenant à la surface extérieure et dans la direction de la normale extérieure au domaine. La constante  $\delta$  intervenant dans le champ de déplacement n'est pas fixée, mais en fait quel que soit sa valeur, les expressions des tenseurs des contraintes et des déformations sont les mêmes. Cette constante traduit un déplacement de solide indéformable le long de l'axe du tube.

$$\begin{cases} \text{Pour } r = R_i & T(\vec{M}; -\vec{E}_r) = -p_i (-\vec{E}_r) \\ \text{Pour } r = R_e & T(\vec{M}; \vec{E}_r) = -p_e \vec{E}_r \\ \text{Pour } z = 0 & T(\vec{M}; -\vec{E}_z) = -\sigma \vec{E}_z \\ \text{Pour } z = L & T(\vec{M}; \vec{E}_z) = \sigma \vec{E}_z \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ B = \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ C = \sigma \end{cases}$$

### 22.

Pour terminer l'étude, il ne reste qu'à vérifier que l'état de contrainte obtenu en tout point soit en accord avec la limite élastique du matériau, ce qui peut être fait en employant par exemple le critère de Von Mises :

$$\begin{aligned} (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 &\leq 2\sigma_e^2 \\ 3\left(\frac{B}{r^2}\right)^2 + (A - C)^2 &\leq \sigma_e^2 \end{aligned}$$

Le cas le plus défavorable étant obtenu au rayon intérieur, on a la condition sur le chargement pour ne pas dépasser la limite d'élasticité :

$$3\left(\frac{(p_i - p_e)^2 R_e^4}{(R_e^2 - R_i^2)^2}\right) + \left(\frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2)} - \sigma\right)^2 \leq \sigma_e^2$$

### 23.

Pour étudier ce frettage, il faut commencer par traiter chaque pièce séparément. On peut noter tout d'abord que sur chacune des pièces il n'existe aucune sollicitation de traction exercée sur les bases, mais que cela ne



signifie pas pour autant qu'il n'y a pas de conditions aux limites sur ces faces. Il faut simplement dire que le chargement est nul sur ces surfaces annulaires.

Pour ce qui est du tube intérieur, le seul chargement non nul est celui dû à la pression d'interface sur la surface extérieure. L'expression des conditions aux limites permet de calculer les constantes d'intégration.

$$\text{Pour } r = R_i \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = -P \vec{E}_r$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_1 = -\frac{P R^2}{R^2 - R_i^2} \quad B_1 = -\frac{P R^2 R_i^2}{R^2 - R_i^2} = A_1 R_i^2 \quad C_1 = 0$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{1-\nu}{E}\right)(A_1) = -\left(\frac{1-\nu}{E}\right)\left(\frac{P R^2}{R^2 - R_i^2}\right) \quad \beta_1 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)(B_1) = -\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\frac{P R^2}{R^2 - R_i^2}\right) R_i^2 = \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \alpha_1 R_i^2$$

Pour ce qui est du tube extérieur, on retrouve un chargement dû à la pression d'interface mais appliqué sur la surface intérieure, ce qui nous donne les valeurs des constantes d'intégration.

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P(-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R_e \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_2 = \frac{P R^2}{R_e^2 - R^2} \quad B_2 = \frac{P R^2 R_e^2}{R_e^2 - R^2} = A_2 R_e^2 \quad C_2 = 0$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{1-\nu}{E}\right)(A_2) = \left(\frac{1-\nu}{E}\right)\left(\frac{P R^2}{R_e^2 - R^2}\right) \quad \beta_2 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)(B_2) = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\frac{P R^2}{R_e^2 - R^2}\right) R_e^2 = \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \alpha_2 R_e^2$$

#### 24.

Pour calculer la pression d'interface  $P$ , il faut écrire une équation de compatibilité de déplacement des points adjacents situés à l'interface. Avec des notations évidentes, nous avons une relation entre les déplacements et le serrage :  $u_{r2}(R) - u_{r1}(R) = \delta$

Ce qui nous conduit aux relations suivantes :

$$\alpha_2 \left( R + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{R_e^2}{R} \right) - \alpha_1 \left( R + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{R_i^2}{R} \right) = \delta$$

$$P \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{R}{R_e^2 - R^2} \right) \left[ (1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_e^2 \right] + \frac{1}{E} \left( \frac{R}{R^2 - R_i^2} \right) \left[ (1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_i^2 \right] \right] = \delta$$

$$P R \left( \frac{K_2}{E} + \frac{K_1}{E} \right) = \delta \quad \text{avec } K_1 = \frac{(1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_i^2}{R^2 - R_i^2} \quad \text{et } K_2 = \frac{(1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_e^2}{R_e^2 - R^2}$$

En définitive le résultat final prend une forme relativement simple. La pression d'interface est directement proportionnelle au serrage ce qui est tout à fait logique.

$$P = \left( \frac{E}{K_1 + K_2} \right) \frac{\delta}{R} = \frac{E \delta (R^2 - R_i^2) (R_e^2 - R^2)}{2 R^3 (R_e^2 - R_i^2)}$$

**25.**

Avec une pression intérieure et une pression extérieure, il faut simplement reprendre les conditions aux limites pour chacune des deux pièces. Cela nous conduit à de nouvelles valeurs pour les constantes associées au cylindre intérieur.

$$\text{Pour } r = R_i \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P_i (-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = -P \vec{E}_r$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_1 = \frac{P_i R_i^2 - P R^2}{R^2 - R_i^2} \quad B_1 = \frac{(P_i - P) R^2 R_i^2}{R^2 - R_i^2} \quad C_1 = 0$$

$$\alpha_1 = \left( \frac{1-\nu}{E} \right) (A_1) = \left( \frac{1-\nu}{E} \right) \left( \frac{P_i R_i^2 - P R^2}{R^2 - R_i^2} \right) \quad \beta_1 = \left( \frac{1+\nu}{E} \right) (B_1) = \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \left( \frac{(P_i - P) R^2 R_i^2}{R^2 - R_i^2} \right)$$

De la même façon, il est possible de recalculer les nouvelles valeurs des constantes associées au cylindre extérieur.

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P (-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R_e \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = -P_e \vec{E}_r$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_2 = \frac{P R^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R^2} \quad B_2 = \frac{(P - P_e) R^2 R_e^2}{R_e^2 - R^2} \quad C_2 = 0$$

$$\alpha_2 = \left( \frac{1-\nu}{E} \right) (A_2) = \left( \frac{1-\nu}{E} \right) \left( \frac{P R^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R^2} \right) \quad \beta_2 = \left( \frac{1+\nu}{E} \right) (B_2) = \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \left( \frac{(P - P_e) R^2 R_e^2}{R_e^2 - R^2} \right)$$

**26.**

Pour obtenir la valeur de la pression d'interface, il faut à nouveau écrire l'équation de compatibilité de déplacement des points adjacents situés à l'interface. Les formules commencent à devenir complexes et il est important de faire régulièrement des vérifications comme par exemple l'homogénéité des expressions obtenues. Il est à noter que le résultat final est indépendant du coefficient de Poisson.

$$u_{r2}(R) - u_{r1}(R) = \delta$$

$$\alpha_2 R + \frac{\beta_2}{R} - \alpha_1 R - \frac{\beta_1}{R} = \delta$$

$$((1-\nu)(PR^2 - P_e R_e^2) + (1+\nu)(P - P_e)R_e^2)(R^2 - R_i^2) - ((1-\nu)(P_i R_i^2 - PR^2) + (1+\nu)(P_i - P)R_i^2)(R_e^2 - R^2) = \frac{E\delta}{R}(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2)$$

$$P(((1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_e^2)(R^2 - R_i^2) + ((1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_i^2)(R_e^2 - R^2)) = \frac{E\delta}{R}(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2P_e R_e^2(R^2 - R_i^2) + 2P_i R_i^2(R_e^2 - R^2)$$

$$P = \frac{E\delta(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2R(P_e R_e^2(R^2 - R_i^2) + P_i R_i^2(R_e^2 - R^2))}{R((1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_e^2)(R^2 - R_i^2) + ((1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_i^2)(R_e^2 - R^2)}$$

$$P = \frac{E\delta(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2R(P_e R_e^2(R^2 - R_i^2) + P_i R_i^2(R_e^2 - R^2))}{2R^3(R_e^2 - R_i^2)}$$

$$\alpha_2 R + \frac{\beta_2}{R} - \alpha_1 R - \frac{\beta_1}{R} = \delta$$

$$P = \frac{E\delta(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2R(P_e R_e^2(R^2 - R_i^2) + P_i R_i^2(R_e^2 - R^2))}{2R^3(R_e^2 - R_i^2)}$$

**27.**

Dans le cas de notre canon on a un tube dont le rayon extérieur est 4 fois le rayon intérieur ( $R_e = 4 R_i$ ) et qui est sollicité par une pression intérieure de 4 000 bar soit 400 MégaPascal. Avec ces données on peut facilement définir des formes simples pour les constantes d'intégration.

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = \frac{p_i}{15} \\ B = \frac{p_i R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} = A R_e^2 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

On peut ensuite regarder le critère de Von Misès pour déterminer la limite élastique minimale pour notre matériau. On rappelle que l'application du critère doit être faite en point de la surface intérieur car c'est l'endroit le plus sollicité. En conclusion, il faudrait que l'acier ait une limite élastique de l'ordre 740 MPa ce qui était très exceptionnel il y a un siècle.

$$3\left(\frac{B}{R_i^2}\right)^2 + (A - C)^2 \leq \sigma_e^2$$

$$A^2 (3 \cdot 16^2 + 1) \leq \sigma_e^2$$

$$1,84 p_i \leq \sigma_e$$

$$740 \text{ MPa} \leq \sigma_e$$

**28.**

Dans le cas du tube fretté, il faut tout d'abord calculer la pression d'interface. Pour cela on peut reprendre la formule précédemment déterminée et la simplifier sachant que la pression extérieure est nulle, que le rayon d'interface est 3 fois le rayon intérieur et que le rayon extérieur est 4 fois le rayon intérieur.

$$P = \frac{E\delta(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2RP_iR_i^2(R_e^2 - R^2)}{2R^3(R_e^2 - R_i^2)}$$

$$P = \frac{E\delta * 8 * 7 * R_i^2 + 2 * 3 * R_i * P_i R_i^2 * 7}{2R_i^3 * 27 * 15}$$

$$P = \frac{28 E \delta}{405 R_i} + \frac{7 P_i}{135}$$

**29.**

On peut dès lors calculer les constantes d'intégration pour le tube intérieur sollicité par une pression interne et une pression externe.

$$\text{Pour } r = R_i \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P_i(-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = -P\vec{E}_r$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_1 = \frac{P_i R_i^2 - P R^2}{R^2 - R_i^2} = \frac{P_i - 9P}{8}$$

$$B_1 = \frac{(P_i - P)R^2 R_i^2}{R^2 - R_i^2} = \frac{9}{8}(P_i - P)R_i^2$$

$$C_1 = 0$$

Il faut faire de même avec le tube extérieur pour lequel nous n'avons qu'une pression interne due à la pression d'interface.

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P(-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R_e \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_2 = \frac{P R^2}{R_e^2 - R^2} = \frac{9}{7} P$$

$$B_2 = \frac{P R^2 R_e^2}{R_e^2 - R^2} = \frac{16}{7} P R^2$$

$$C_2 = 0$$

**30.**

Il faut ensuite passer au calcul des contraintes équivalentes maximales pour les tubes. Comme nous l'avons déjà vu elles seront obtenues à chaque fois sur pour les rayons intérieurs, la surface interne du tube étant systématiquement la plus sollicitée.

$$\sigma_{eqVM1}^2 = 3 \left( \frac{B_1}{R_i^2} \right)^2 + (A_1 - C_1)^2$$

$$\sigma_{eqVM2}^2 = 3 \left( \frac{B_1}{R^2} \right)^2 + (A_1 - C_1)^2$$

$$\sigma_{eqVM1}^2 = 3 \left( \frac{9}{8} (P_i - P) \right)^2 + \left( \frac{P_i - 9P}{8} \right)^2$$

$$\sigma_{eqVM2}^2 = 3 \left( \frac{16P}{7} \right)^2 + \left( \frac{9P}{7} \right)^2$$

$$\sigma_{eqVM1}^2 = \frac{244 P_i^2 - 504 P_i P + 324 P^2}{64}$$

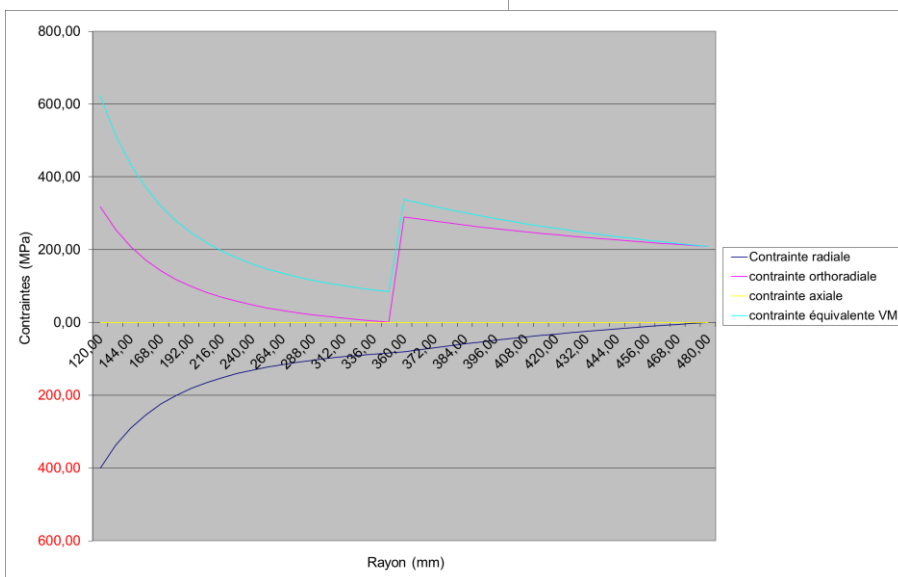
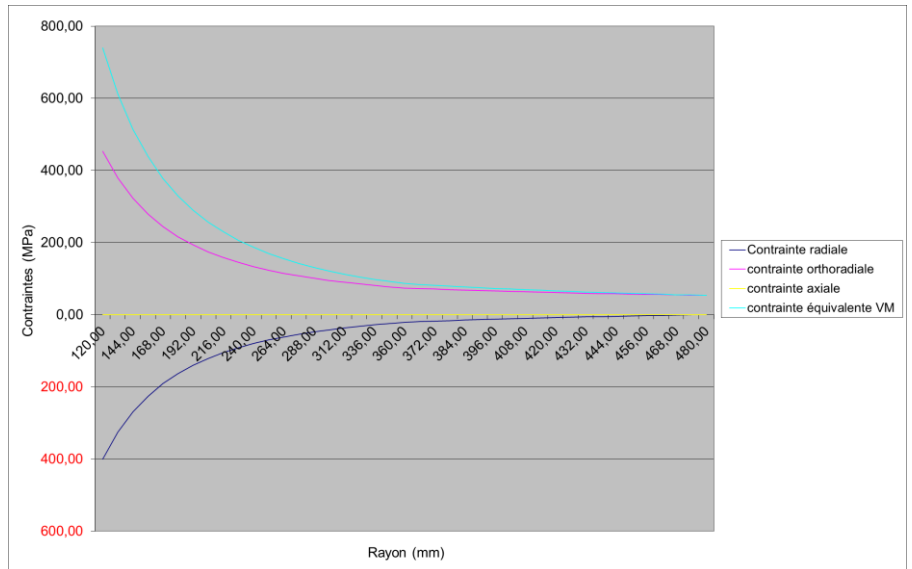
$$\sigma_{eqVM2}^2 = \frac{849}{49} P^2$$

Avec les valeurs numériques proposées et les formules obtenues on peut donner un tableau de résultats pour différentes valeurs de serrage. On constate que l'optimum est proche de 1 mm.

Serrage : $\delta$ (mm)	0	0,5	1	1,5	0,89
Pression d'interface : $P$ (MPa)	20,74	81,23	141,73	202,22	128,42
Contrainte de Von Misès rayon intérieur pièce 1 : $\sigma_{eqVM1}$	739,49	622,51	515,02	424,29	537,56
Contrainte de Von Misès rayon intérieur pièce 2 : $\sigma_{eqVM2}$	86,33	338,14	589,95	841,75	534,55

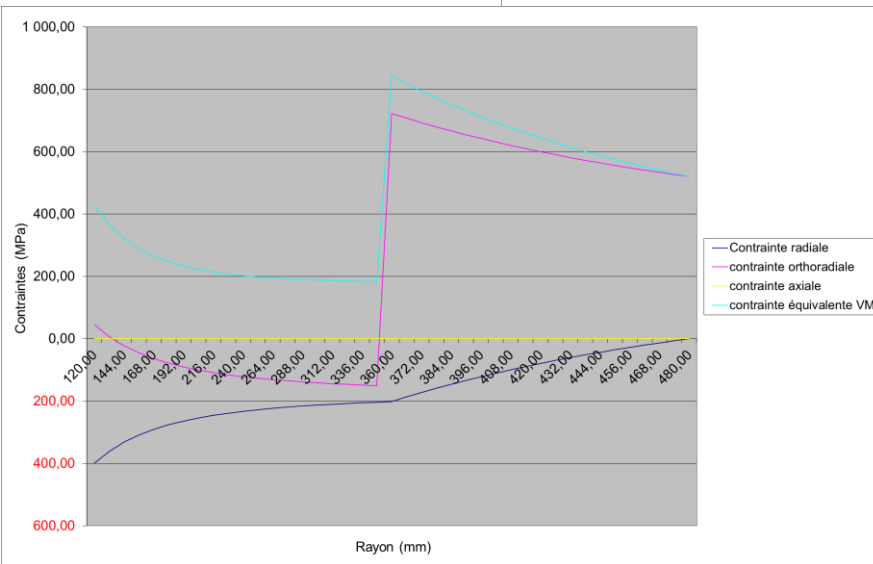
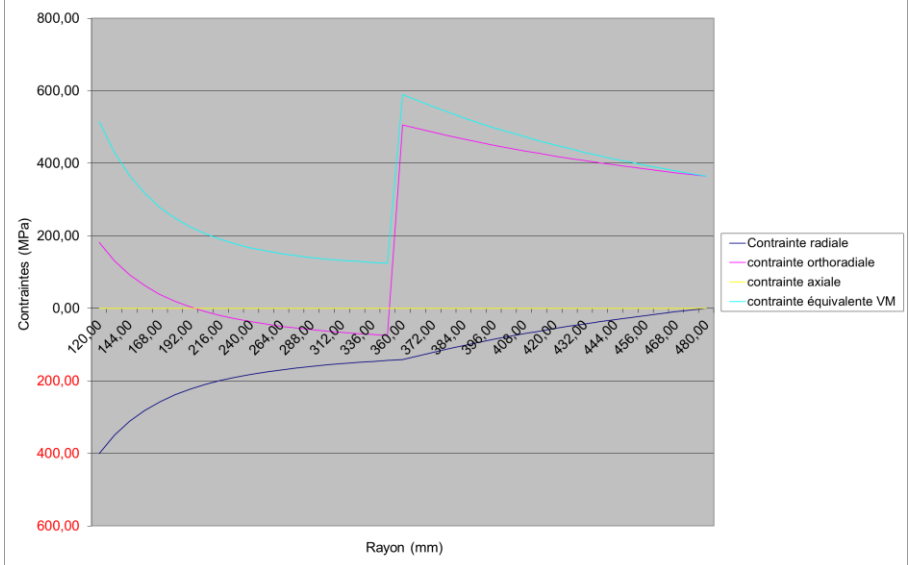
### 31.

Pour bien comprendre l'effet du serrage, on peut tracer les lois d'évolutions des contraintes principales et de la contrainte équivalente de Von Misès en fonction du rayon. Dans le cas d'un serrage nul, on constate que les contraintes radiales et orthoradiales sont maximales au rayon intérieur et qu'elles ont pratiquement la même valeur mais de signe opposées. La contrainte équivalente de Von Misès maximale vaut 739 MPa.



Avec un serrage de 0,5 mm, on voit que la contrainte orthoradiale au rayon intérieur a baissé et qu'elle présente une discontinuité au rayon d'interface. La contrainte équivalente de Von Misès maximale est de 623 MPa au rayon intérieur.

Avec un serrage de 1mm, la contrainte orthoradiale au rayon intérieur a encore baissé et la discontinuité à l'interface a augmenté en valeur. La contrainte équivalente de Von Misés maximale est égale à 590 MPa mais cette fois elle est située au rayon d'interface.



Pour un serrage de 1,5 mm tout est amplifié et on constate que l'on est allé trop loin, la contrainte équivalente de Von Misés maximale étant égale à 842 MPa au rayon d'interface. Avec les formules obtenues, il est simple de trouver le serrage optimum qui est de 0,89 mm et qui donne une contrainte équivalente de Von Misés maximale égale à 538 MPa. Il est possible de diminuer cette valeur maximale en jouant sur le positionnement du rayon d'interface. Par exemple avec un rayon d'interface à 300 mm et un

serrage à 0,65 mm, la contrainte équivalente maximale est en dessous de 500 MPa. Enfin il est encore possible d'abaisser cette valeur en construisant plusieurs frettages à des rayons judicieusement calculés.

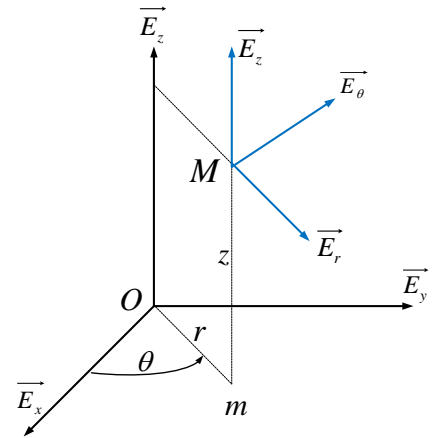
### 32.

Pour ne pas conclure cet enseignement en laissant penser que les applications de la mécanique des solides déformables sont guerrières, il convient de noter que les calculs de frettage sont aussi utiles pour un assemblage à base de roulement ou encore pour le dudgeonnage d'un tube dans une plaque. Mais dans cette dernière application, il convient de dépasser la limite d'élasticité du matériau et de faire les calculs avec une loi de comportement en plasticité ce qui dépasse les objectifs de ce cours mais laisse à l'auditeur encore de vastes champs d'investigation dans la mécanique.

Elasticité linéaire en coordonnées polaires

Relations Déplacement-Déformation

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \end{array} \right.$$



Principe fondamental de la mécanique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho(f_r - \gamma_r) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho(f_\theta - \gamma_\theta) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho(f_z - \gamma_z) = 0 \end{array} \right.$$

Equations de Beltrami

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial r} + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] + \Delta \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} \left( 2 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial r^2} = 0 \\ \frac{2}{r} \left( \frac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial \theta} + \rho(f_r - \gamma_r) \right) + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] + \Delta \sigma_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2} \left( 2 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial I_1}{\partial r} \right) = 0 \\ 2 \frac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial z} + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] + \Delta \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial \theta} - \rho(f_\theta - \gamma_\theta) \right) + \Delta \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2 \sigma_{r\theta\theta} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial I_1}{\partial \theta} \right) = 0 \\ \frac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial r} + \frac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial z} + \Delta \sigma_{rz} - \frac{1}{r^2} \left( 2 \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial r \partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial \theta} + \Delta \sigma_{\theta z} + \frac{1}{r^2} \left( 2 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta z} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 I_1}{\partial \theta \partial z} = 0 \end{array} \right.$$

avec :  $\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r \right) + \frac{\partial f_z}{\partial z}$        $\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$

$I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}$

Opérateur différentiel

si  $g = g(r)$        $\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{1}{r^2} g = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r g) \right]$