

Mécanique des solides déformables

Auteur
Michel MAYA

3 – Contraintes

Ce cours est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons
Paternité + Pas d'utilisation commerciale + Pas de modification 4.0 International



3-1 CONTRAINTES

Lois de conservation

1.

Comme nous le constaterons ultérieurement, l'approche cinématique de l'étude d'un domaine ne peut être dissociée d'une approche statique qui conduit à la transmission des efforts à l'intérieur de ce domaine. Nous allons ainsi découvrir la notion de contraintes qui nous sera très utile pour dimensionner correctement les structures. Mais préalablement il nous faut établir certaines relations dont en particuliers les lois de conservation qui servent à exprimer le bilan d'une grandeur associée à un domaine.

2.

L'évolution d'un milieu continu au cours du temps ne peut être aléatoire. Elle est dictée par le respect de différentes lois ou principes de la physique.

Le principe fondamental de la mécanique est incontournable dans une étude associant les efforts et les déplacements. Mais il ne faut pas perdre de vue le premier principe de la thermodynamique qui permet d'associer la notion de travail d'une force à celle de chaleur par l'intermédiaire de l'énergie sous toute ses formes. Le second principe, représenté par une inégalité traduisant l'irréversibilité de toute évolution, fait aussi partie des grands classiques inévitables. Mais il existe aussi d'autres relations parfois négligées mais dont en définitive on ne peut se passer comme par exemple l'équation de continuité traduisant la conservation de la masse.

3.

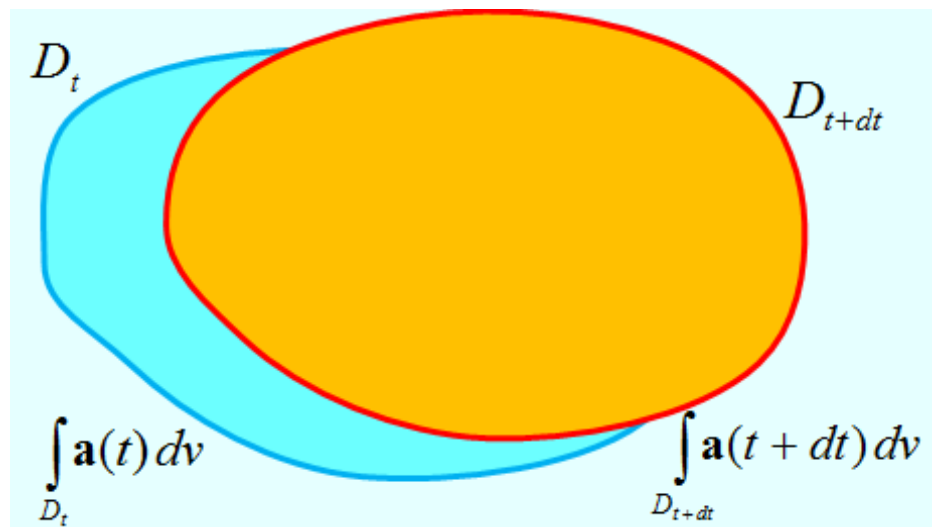
Tous ces principes s'écrivent sous forme de lois qui représentent la conservation de certaines entités physiques. L'écriture de ces lois conduit à des équations qui, selon les variables utilisés, prendront une forme ou une autre. Elles sont souvent présentées sous forme globale pour un domaine matériel complet. Mais elles peuvent aussi prendre une forme locale sur un domaine infinitésimal.

4.

Pour connaître les évolutions de nos différentes quantités au cours du temps, nous allons isoler un domaine à un instant donné.

La quantité à étudier étant distribuée dans le volume, elle est définie par une intégrale volumique.

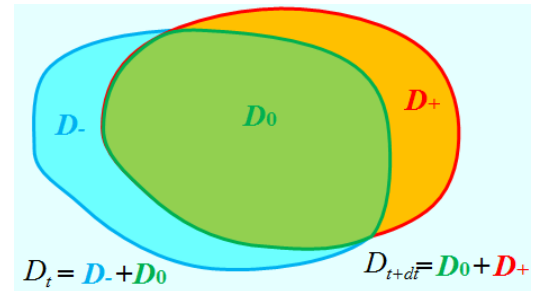
Nous devons ensuite regarder ce que devient cette quantité lorsque le domaine a évolué.



5.

Lors de cette évolution du domaine pendant un intervalle de temps très court, on constate qu'il existe un domaine de chevauchement très important.

Entre les deux instants, on constate à la fois une perte et un gain de volume.



6.

Pour calculer notre variation entre les deux instants, nous allons calculer les intégrales à chaque instant en décomposant systématiquement le domaine d'intégration en deux parties.

$$J_t = \int_{D_t} \mathbf{a}(t) dv = \int_{D_0} \mathbf{a}(t) dv + \int_{D_-} \mathbf{a}(t) dv$$

$$J_{t+dt} = \int_{D_{t+dt}} \mathbf{a}(t+dt) dv = \int_{D_0} \mathbf{a}(t+dt) dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt) dv$$

Le calcul de la différence des intégrales conduit à trois domaines d'intégration. On constate alors que l'on en fait deux contributions de nature différente. Sur le domaine commun, c'est la variation de l'intégrande en fonction du temps qui est importante, alors que les deux autres intégrales traduisent le fait que le volume d'intégration évolue en fonction du temps.

$$J_{t+dt} - J_t = \int_{D_0} \mathbf{a}(t+dt) dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt) dv - \int_{D_0} \mathbf{a}(t) dv - \int_{D_-} \mathbf{a}(t) dv$$

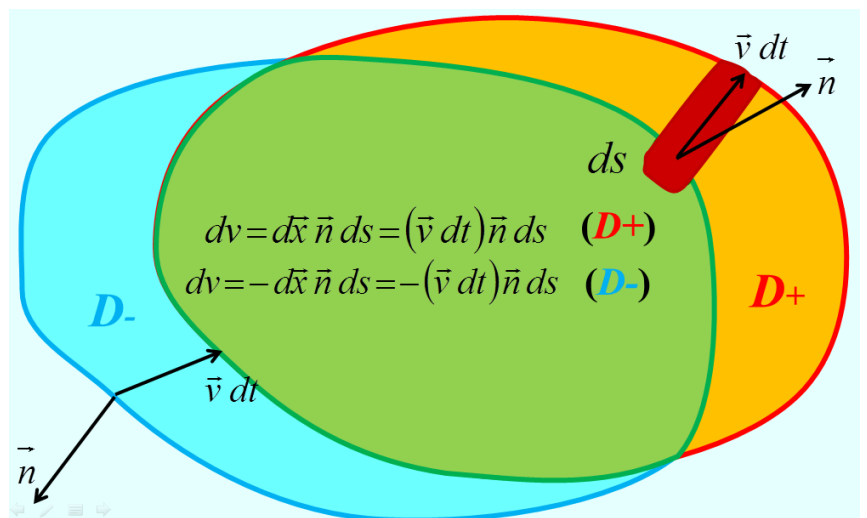
$$J_{t+dt} - J_t = \int_{D_0} [\mathbf{a}(t+dt) - \mathbf{a}(t)] dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt) dv - \int_{D_-} \mathbf{a}(t) dv$$

7.

Le calcul du volume élémentaire pour ces deux dernières intégrales peut se faire en considérant qu'il est généré par le déplacement entre les deux instants d'un élément de surface pris sur l'enveloppe du domaine initial.

Ce déplacement est obtenu en multipliant le vecteur vitesse du point central de l'élément de surface par l'intervalle de temps. On obtient alors un cylindre élémentaire. Son volume est calculé en multipliant sa hauteur par l'aire de sa base. Pour la hauteur, comme le déplacement n'est pas nécessairement perpendiculaire à la base, il faut la calculer comme étant le résultat du produit scalaire du vecteur déplacement avec le vecteur normal à la surface au point considéré. Ce calcul est valable pour l'augmentation de volume, mais pour la diminution, compte tenu que le produit scalaire donne un résultat négatif, il faut en prendre l'opposé pour obtenir le volume élémentaire.

$$\partial D_+ \cup \partial D_- = \partial D$$



8.

L'intervalle de temps étant infiniment court, on obtient des relations donnant la variation par rapport au temps.

L'association des surfaces générant l'augmentation de volume et la diminution de volume nous donnant la surface enveloppe fermée du domaine initial, on peut assembler les deux dernières intégrales entre elles, ce qui nous donne alors la formule traduisant la dérivée particulaire d'une intégrale. Il est à noter que la fonction intégrante peut être toute à fait générale, scalaire, vectorielle ou tensorielle.

$$\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t = \int_{D_0} \left[\frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t} dt \right] dv + \int_{\partial D_+} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} dt ds + \int_{\partial D_-} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} dt ds$$

$$\frac{\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{a} dv = \int_D \frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t} dv + \int_{\partial D_+} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} ds + \int_{\partial D_-} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} ds$$

On voit clairement apparaître les deux contributions. D'une part la variation temporelle de la fonction intégrante, d'autre part la variation spatiale du domaine. Il convient de noter que cette dernière contribution peut être interprétée comme le flux au travers d'une surface fermée.

$$\frac{d}{dt} \int_D \mathbf{a} dv = \int_D \frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} ds$$

9.

Cette notion de flux au travers d'une surface fermée nous conduit tout naturellement à évoquer le théorème de la divergence, ou encore théorème de Green Ostrogradski et qui s'énonce comme suit : le flux d'un champ tensoriel au travers d'une surface fermant un domaine est égal à l'intégrale de la divergence du champ tensoriel sur le domaine. C'est un théorème de conservation car il indique que ce qui entre ou sort dans un domaine contribue à la variation du stockage de l'entité dans le domaine.

$$\int_{\partial D} \mathbf{A} \vec{n} ds = \int_D \text{div} \mathbf{A} dv$$

Dans le cas où l'entité étudiée est une fonction scalaire, le théorème prend une forme légèrement différente :

$$\int_{\partial D} f \vec{n} ds = \int_D \overrightarrow{\text{grad}}(f) dv$$

Ce théorème étant valable quelque soit l'entité tensorielle, il peut être appliqué pour le calcul d'une résultante d'une répartition de pression constante sur un domaine.

$$\vec{R} = \int_{\partial D} (-p) \vec{n} ds$$

Cette pression étant constante, le vecteur gradient associé est nul et l'on constate que la résultante recherchée est nulle quelque soit la forme du domaine étudié.

$$\vec{R} = - \int_D \overrightarrow{\text{grad}}(p) dv = \vec{0}$$

10.

Profitions de cette digression dans le monde des mathématiques pour énoncer le théorème de l'intégrale nulle. Si, quelque soit un sous domaine pris à l'intérieur d'un domaine plus vaste, l'intégrale d'un champ tensoriel est nul, alors ce champ tensoriel est nul sur l'ensemble du vaste domaine.

$$\text{Si } \int_{D'} \mathbf{a} dv = 0 \quad \forall D' \subset D \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ sur } D$$

La démonstration peut se faire par l'absurde en considérant qu'il existe au moins un point à l'intérieur du vaste domaine pour lequel la fonction est non nulle. Par continuité, elle sera non nulle sur un domaine enveloppant le point et l'intégrale sur ce domaine ne sera pas nulle.

11.

Une loi de conservation exprime un bilan d'une grandeur associée à un domaine. On a une équation qui traduit le fait que la variation de la grandeur à l'intérieur du domaine est égale à la somme de la quantité produite à l'intérieur du domaine et de la quantité transitant au travers de la surface enveloppe du domaine. Nous avons une expression globale sur un domaine, mais avec les théorèmes précédemment vus, il est possible d'obtenir une expression locale valable en tout point du domaine.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{a} dv = \int_D \mathbf{a}_v dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}_s ds$$

$\mathbf{A}$: grandeur tensorielle

$\mathbf{a}$: densité volumique dans le domaine considéré

$\mathbf{a}_v$: densité volumique produite par unité de temps dans le domaine considéré

$\mathbf{a}_s$: densité surfacique associée au flux de $\mathbf{A}$ entrant à travers de la frontière du domaine

12.

Les différentes formulations de l'équation de conservation de la masse, dite encore équation de continuité, sont une belle illustration de ces notions d'expressions globale et locale. Le principe de conservation de la masse postule que la variation de la masse d'un domaine au cours du temps est nulle.

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Par l'intermédiaire de la masse volumique, on passe à une intégrale de volume.

$$M = \int_D \rho dv \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_D \rho dv = 0$$

On peut alors utiliser la formule de la dérivée particulière

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0$$

Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale sur la surface du domaine en intégrale de volume.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_D \text{div}(\rho \vec{v}) dv = 0$$

Avec le théorème de l'intégrale nulle, on obtient alors une première forme locale de l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

On peut aussi utiliser les relations suivantes

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \rho} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \rho}$$

Ce qui nous donne une nouvelle forme locale de l'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

13.

Comme nous venons de le voir, les lois de conservation d'une entité définie sur un domaine doivent tenir compte à la fois de l'évolution de l'entité au cours du temps, mais aussi de l'évolution du domaine au cours du temps. En partant du constat que le domaine est déformable, il faut tenir compte de la variation des limites du domaine au cours du temps.

3-2

CONTRAINTES

Principe fondamental

1.

Ayant maintenant à notre disposition les outils nécessaires, nous allons pouvoir aborder le principe fondamental de la mécanique. Comme nous le verrons, ce dernier sera exprimé en chaque point du domaine, ce qui va nous conduire à des expressions locales fort différentes des expressions globales habituellement employées.

2.

Il existe plusieurs formulations permettant d'introduire la mécanique. Selon la présentation retenue, ce qui peut être un axiome peut devenir un théorème.

La formulation que nous retenons, qui la plus couramment utilisée en première présentation, conduira ultérieurement à démontrer le théorème des puissances virtuelles. Il convient toutefois de noter que nous employons la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique galiléen et non pas le torseur dynamique galiléen. La différence entre ces deux torseurs existe lorsque le domaine peut avoir une perte de masse, comme dans le cas de fusées qui transforment progressivement de la matière en énergie.

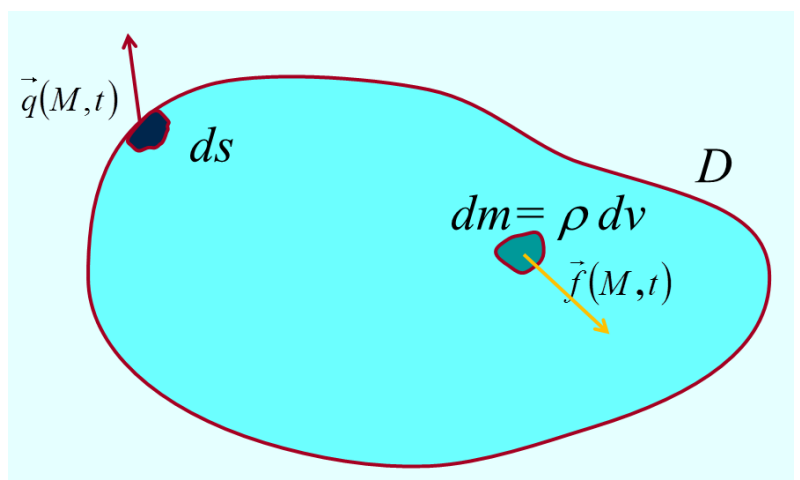
Il existe au moins un repère $\underline{R}_g$, dit galiléen, et une chronologie, dite absolue, tels que à chaque instant et pour toute partie D d'un système Σ la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique galiléen est égal au torseur des actions extérieures s'exerçant sur D .

3.

Il convient de préciser la nature des efforts exercés par l'extérieur sur le domaine d'étude. Ils sont de deux types différents.

Il y a des actions réparties dans le volume et exercées à distance. On y trouve l'action de la pesanteur ou les forces électromagnétiques. Elles sont représentées par une densité massique d'effort définie en chaque point du domaine $\vec{f}(M,t)$.

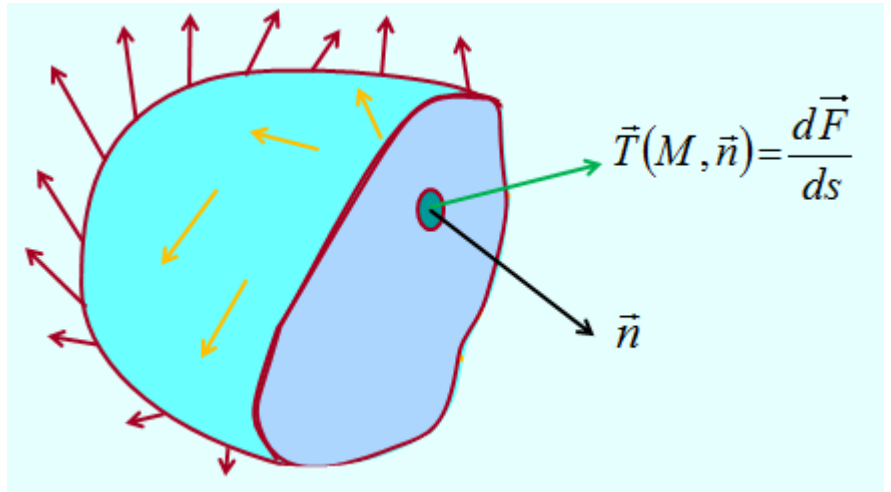
Puis il y a les actions réparties sur la surface délimitant le domaine. C'est par exemple la pression du fluide enveloppant le domaine ou encore les efforts dus aux liaisons cinématiques. Elles sont représentées par une densité surfacique d'effort définie en chaque point de la surface délimitant le domaine $\vec{q}(M,t)$.



4.

L'ensemble des efforts appliqués à notre domaine permet donc de satisfaire au principe fondamental de la mécanique. Toutefois, si l'on coupe le domaine en deux parties et que l'on isole une partie les seuls efforts considérés jusqu'à présent ne permettent pas nécessairement de respecter le principe fondamental de la mécanique.

Il convient donc d'envisager qu'il existe des efforts exercés par la partie enlevée sur la partie restante. On peut envisager des actions à distances, mais nous considérerons que ce sont des actions surfaciques créées par la rupture des liaisons interatomiques. Elles sont représentées par une densité surfacique de force $\vec{T}(M, \vec{n})$ appelé vecteur contrainte au point M dans la direction de la normale à la surface de coupe. Cette densité surfacique n'est fonction que de la normale extérieure au domaine pour le point d'étude. C'est le postulat de Cauchy.



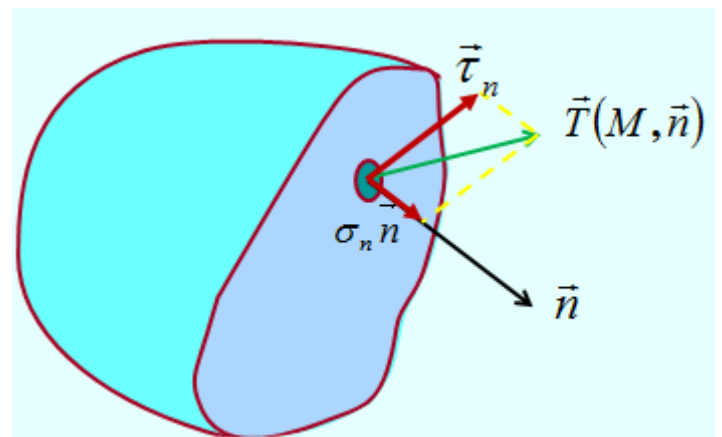
5.

On peut alors définir la contrainte normale σ_n comme étant la projection sur la direction de la normale $\vec{n}$ du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$. De même on a le vecteur contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ (encore appelé cisail ou contrainte de cisaillement) qui représente le vecteur contrainte projeté dans le plan de la facette.

On peut obtenir ces composantes par de simples relations. Une contrainte normale positive traduit localement un état de traction de la matière. Si au contraire elle est négative, nous avons localement un état de compression.

$$\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{n} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$$



6.

Les composantes du vecteur contrainte représentent une force rapportée à une surface. Elles sont donc homogènes à une pression et vont s'exprimer en pascal ou plus généralement en mégapascal.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{ds}$$

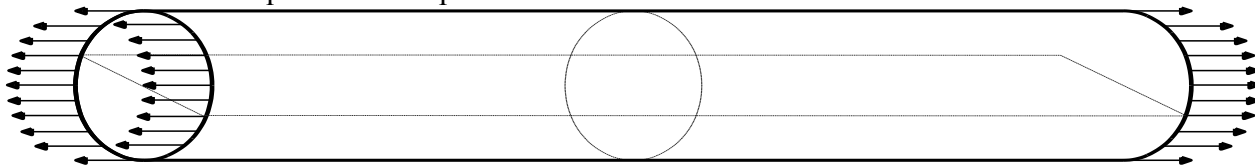
Le vecteur contrainte ainsi déterminé s'applique sur la structure dans sa configuration actuelle, c'est-à-dire déformée. C'est une version eulérienne de ce vecteur. Nous avons fait le choix d'une axiomatique privilégiant l'application d'une force infinitésimale sur l'élément de surface de contact. Ce choix conduit à des problèmes d'interprétation des résultats lorsque l'on est en présence de forts champs magnétiques. Dans ce cas, il faudra aussi considérer l'application d'un moment infinitésimal sur l'élément de contact.

Si nous avons isolé l'autre partie de notre domaine, nous aurions trouvé des efforts opposés du fait du principe des actions mutuelles.

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

7.

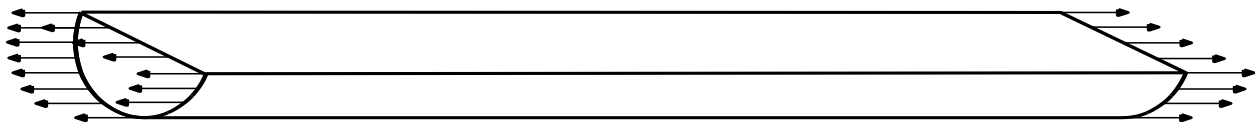
Ce qu'il faut bien réaliser, c'est que le vecteur contrainte est essentiellement dépendant du plan de séparation des deux parties, plan orienté par un vecteur normal. Pour s'en rendre compte nous allons nous intéresser à un domaine cylindrique sollicité sur ses deux bases par des distributions d'efforts uniformément répartis et opposés. Ce domaine est immobile et considéré en équilibre. On obtient une sollicitation de traction. Imaginons que l'on veuille couper le domaine en deux parties égales. La première coupe sera faite par un plan de section droite, la deuxième sera faite par un plan méridien. Ces deux plans contiennent le point central du domaine qui sera notre point d'étude.



Pour la première coupe, il est nécessaire d'envisager une distribution de vecteurs contrainte non nuls dans le plan de coupe si l'on veut que le domaine isolé soit encore en équilibre.



Par contre, pour la deuxième coupe, on se rend compte que notre domaine est en équilibre sans l'ajout de vecteur contrainte.

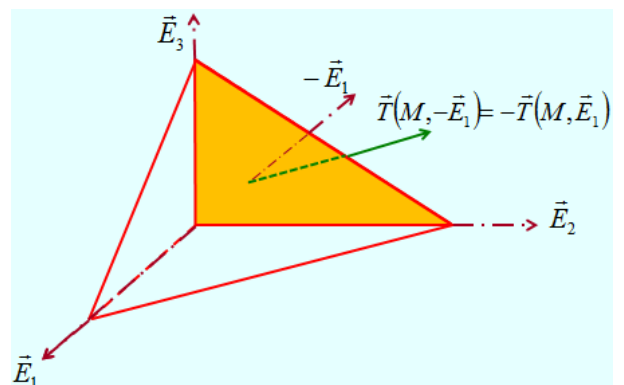


Ainsi, il existe en chaque point d'étude autant de vecteurs contrainte que l'on envisage de plans de coupe. Cette infinité de vecteurs nous interpelle et nous allons essayer de définir l'état de contrainte en un point par une autre notion.

8.

Pour cela, nous allons établir la relation existante entre le vecteur contrainte et le vecteur normal associé au plan de coupe. A l'intérieur d'un domaine en équilibre, on isole un tétraèdre infinitésimal dont trois faces sont perpendiculaires aux trois vecteurs d'une base orthonormée. On s'intéresse à la face orthogonale au premier vecteur de la base. Les efforts appliqués par l'extérieur sur cette face font apparaître le vecteur contrainte.

A ce vecteur, on peut associer sa composante normale et sa composante tangentielle. Cette dernière est contenue dans la face d'étude.



On peut alors représenter ce vecteur par ses composantes dans la base. Ces composantes seront écrites avec une notation indicielle naturelle. Le premier indice est celui associé à la normale de la face d'étude et le deuxième indice est celui du vecteur de projection. Lorsque les deux indices sont confondus, on obtient une contrainte normale.

$$\vec{T}(M, \vec{E}_1) = \sigma_n \vec{E}_1 + \tau_n$$

$$\vec{T}(M, \vec{E}_1) = \sigma_{11} \vec{E}_1 + (\sigma_{12} \vec{E}_2 + \sigma_{13} \vec{E}_3)$$

9.

On trouve un résultat similaire sur la deuxième face. La composante normale du vecteur contrainte est portée par le deuxième vecteur de la base.

$$\vec{T}(M, \vec{E}_2) = (\sigma_{21} \vec{E}_1) + \sigma_{22} \vec{E}_2 + (\sigma_{23} \vec{E}_3)$$

10.

La troisième face donne bien entendu un résultat similaire. On obtient un ensemble de neuf composantes pour représenter les vecteurs contraintes sur ces trois faces.

$$\vec{T}(M, \vec{E}_3) = (\sigma_{31} \vec{E}_1 + \sigma_{32} \vec{E}_2) + \sigma_{33} \vec{E}_3$$

11.

Il reste à étudier la quatrième face orientée par un vecteur unitaire non colinéaire aux vecteurs de base. On peut bien entendu lui associer un vecteur contrainte spécifique.

12.

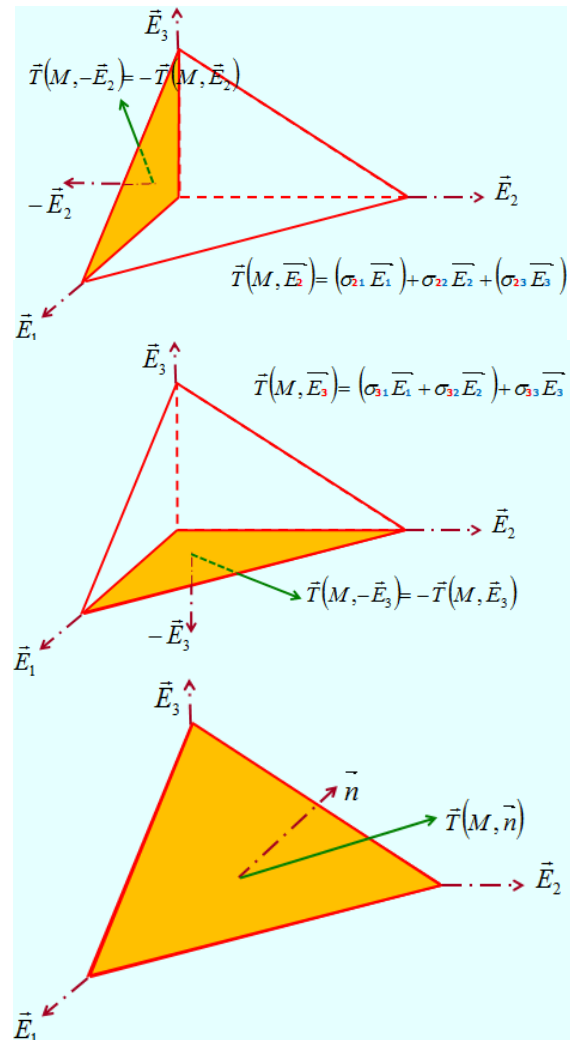
Pour obtenir les forces associées à ces faces, il faut multiplier ces vecteurs contrainte par l'aire des surfaces sur lesquels ils s'appliquent.

Tout d'abord, il convient de faire une remarque à partir de l'expression issue du théorème de la divergence appliqué à une fonction scalaire.

$$\int_{\partial D} f \vec{n} ds = \int_D \overrightarrow{\text{grad}(f)} dv$$

Si cette fonction est constante, on obtient un résultat très intéressant sur la surface enveloppant un domaine. En additionnant tous les vecteurs associés aux éléments de surface d'un domaine fermé, on obtient un vecteur nul.

$$\int_{\partial D} f \vec{n} ds = f \int_{\partial D} \vec{n} ds = \int_D \overrightarrow{\text{grad}(f)} dv = \vec{0} \Rightarrow \int_{\partial D} \vec{n} ds = \vec{0}$$

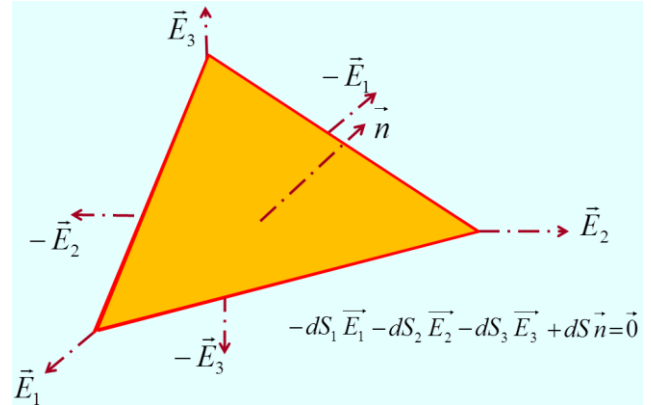


13.

Regardons ce que donne l'application de ce résultat à notre volume tétraédrique élémentaire. Les surfaces étant élémentaires, on peut omettre le signe d'intégration. Avec des notations implicites, notre équation s'écrit au fur et à mesure des contributions des différentes surfaces.

Par projection sur les vecteurs de base, on peut alors en déduire une relation intéressante.

$$n_i dS = dS_i$$



14.

Notre domaine étant infinitésimal, on néglige dans l'expression du principe fondamental de la mécanique toutes les contributions volumiques qui sont d'un ordre supérieur par rapport aux contributions surfaciques. D'autre part, on peut aussi omettre les signes d'intégration.

$$\vec{0} \approx \vec{T}(M, \vec{n})dS + \vec{T}(M, -\vec{E}_1)dS_1 + \vec{T}(M, -\vec{E}_2)dS_2 + \vec{T}(M, -\vec{E}_3)dS_3$$

Avec la relation que nous venons de démontrer, on peut obtenir une relation simplifiée.

$$\vec{0} \approx (\vec{T}(M, \vec{n}) + n_1 \vec{T}(M, -\vec{E}_1) + n_2 \vec{T}(M, -\vec{E}_2) + n_3 \vec{T}(M, -\vec{E}_3))dS$$

Et le principe des actions mutuelles nous donne une relation très intéressante. Avec cette dernière, on constate qu'à partir de la connaissance des vecteurs contraintes associés aux trois vecteurs d'une base, on peut calculer le vecteur contrainte dans n'importe quelle direction.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_1 \vec{T}(M, \vec{E}_1) + n_2 \vec{T}(M, \vec{E}_2) + n_3 \vec{T}(M, \vec{E}_3) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{T}(M, \vec{n}) = n_i \vec{T}(M, \vec{E}_i)$$

Dans une base cartésienne, les composantes du vecteur contrainte dans une direction quelconque sont déduites par une relation matricielle.

$$\begin{cases} T_1 = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31} \\ T_2 = n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32} \\ T_3 = n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33} \end{cases}$$

On en déduit une formulation indicelle : $T_i = \sigma_{ji} n_j$

Ce qui peut se traduire par une relation tensorielle qui fait apparaître le tenseur des contraintes ou encore tenseur de Cauchy. Il est fonction du point d'étude.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma(M)}} \vec{n}$$

15.

Ce tenseur contrainte permet de connaître la distribution des efforts à l'intérieur de notre domaine. Il est donc dépendant des charges appliquées, mais aussi de la cinématique du milieu étudié. Les équations de la dynamique vont nous permettre d'établir la relation de dépendance.

Pour écrire le principe fondamental de la dynamique, il faut exprimer le torseur des efforts appliqués par l'extérieur. Comme nous l'avons déjà dit, nous aurons deux contributions.

La première concerne les actions à distance. Elles sont réparties dans tout le volume et elles sont schématisées par une distribution massique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \vec{f}(M, t) dm \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M, t) dm \end{array} \right\}$$

La deuxième contribution est celle des actions de contact. Elles sont réparties sur tout ou partie de la surface délimitant le domaine et elles sont schématisées par une distribution surfacique qui n'est autre que le vecteur contrainte.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial D} \vec{T}(P, \vec{n}) dS \\ \int_{\partial D} \vec{OP} \wedge \vec{T}(P, \vec{n}) dS \end{array} \right\}$$

Dans l'autre membre de l'égalité, nous trouvons la variation par rapport au temps du torseur cinétique galiléen.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_D \vec{V}(M, t / R_g) dm \\ \frac{d}{dt} \int_D \vec{OM} \wedge \vec{V}(M, t / R_g) dm \end{array} \right\}$$

Si nous travaillons avec un système à masse conservative, en variables de Lagrange, il est équivalent au torseur dynamique galiléen.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm \end{array} \right\}$$

16.

L'application du Principe Fondamental de la Mécanique assure un lien entre tous ces torseurs. Pour l'instant nous avons une expression globale valable pour tout domaine matériel. On constate que l'on a bien une expression sous forme de loi de bilan. Pour deux torseurs, l'intégration se fait sur l'ensemble du domaine, mais pour le torseur des efforts extérieur de contact, l'intégration est faite sur la surface fermée enveloppant le domaine. L'utilisation du théorème de la divergence va nous permettre de passer à une intégration sur l'ensemble du domaine.

$$\begin{aligned} \int_D \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm &= \int_D \vec{f}(M, t) dm + \int_{\partial D} \vec{T}(P, \vec{n}) dS \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm &= \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M, t) dm + \int_{\partial D} \vec{OP} \wedge \vec{T}(P, \vec{n}) dS \end{aligned}$$

Pour cela, sur la résultante, nous allons utiliser le lien entre le vecteur contrainte et le tenseur des contraintes. Le deuxième membre représentant le flux du tenseur des contraintes au travers de notre surface fermée, l'application du théorème de la divergence nous permet de passer à une intégrale volumique.

$$\int_{\partial D} \vec{T}(P, \vec{n}) dS = \int_{\partial D} \vec{\sigma} \vec{n} dS = \int_D \text{div} \vec{\sigma} dv$$

Notre équation de résultante prend alors une forme avec trois intégrales portant sur le même domaine.

$$\int_D \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm = \int_D \vec{\text{div}} \vec{\sigma} dv + \int_D \vec{f}(M, t) dm$$

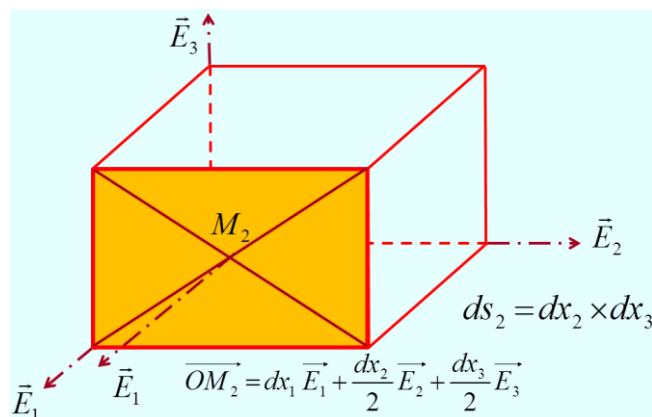
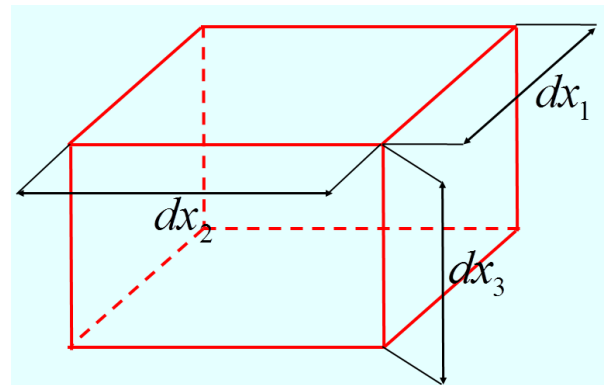
En passant les intégrales massiques à des intégrales volumiques et en utilisant le théorème de l'intégrale nulle, on obtient une expression simplifiée. C'est une équation valable en tout point de notre domaine. Elle représente l'équation de résultante du Principe Fondamental de la Mécanique.

$$\rho \vec{\gamma}(M, t / R_g) = \vec{\text{div}} \vec{\sigma} + \rho \vec{f}(M, t)$$

17.

L'équation que nous venons d'obtenir est primordiale pour notre cours de mécanique. Elle montre bien le lien entre le tenseur des contraintes, les actions à distance exercées par l'extérieur sur notre domaine et le mouvement de notre domaine.

Pour convaincre l'auditeur un peu septique devant la démonstration employant le théorème de la divergence, nous allons refaire cette démonstration en isolant un domaine parallélépipédique.



On positionne un repère par rapport au domaine, l'origine du repère étant confondue avec un sommet, les arêtes définissant les axes. Le domaine est infiniment petit. Il est donc délimité par six surfaces rectangulaires parallèles entre elles deux à deux.

Pour chaque face, nous pouvons définir la normale extérieure au domaine, la position du centre de surface, déterminée par les coordonnées dans le repère, et l'aire de la surface,

18.

Sur la face étudiée s'applique un vecteur contrainte. Il est obtenu en faisant le produit du tenseur des contraintes défini au centre de surface par le vecteur normal à la surface.

$$\vec{T}(M_2, \vec{E}_1) = \vec{\sigma}(M_2) \cdot \vec{E}_1$$

La première composante de ce tenseur contrainte est obtenue en tenant compte des augmentations de la fonction au point origine, augmentations dues aux différences de positionnement des deux points.

$$\sigma_{11}(M_2) = \sigma_{11}(dx_1, dx_2/2, dx_3/2) = \sigma_{11}(0, 0, 0) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}$$

On a un résultat similaire pour toutes les autres composantes

$$\sigma_{ij}(M_2) = \sigma_{ij}(0, 0, 0) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}$$

19.

En regardant ce qui se passe pour chaque face du domaine, on obtient le tableau suivant. L'auditeur un peu curieux pourra compléter ce tableau en représentant les cinq autres composantes du tenseur des contraintes. Avec ce tableau, en multipliant dans une colonne l'aire par la composante du vecteur contrainte, on obtient la composante force associée. Ensuite, il faut additionner toutes ces composantes forces pour obtenir la résultante des forces de surface appliquées à notre domaine. Comme on peut le constater facilement, nous allons avoir de nombreuses simplifications.

Point	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Coordonnée	$\begin{cases} 0 \\ dx_2 / 2 \\ dx_3 / 2 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1 \\ dx_2 / 2 \\ dx_3 / 2 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1 / 2 \\ 0 \\ dx_3 / 2 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1 / 2 \\ dx_2 \\ dx_3 / 2 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1 / 2 \\ dx_2 / 2 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1 / 2 \\ dx_2 / 2 \\ dx_3 \end{cases}$
normale	$-\vec{E}_1$	$+\vec{E}_1$	$-\vec{E}_2$	$+\vec{E}_2$	$-\vec{E}_3$	$+\vec{E}_3$
aire	$dx_2 dx_3$	$dx_2 dx_3$	$dx_3 dx_1$	$dx_3 dx_1$	$dx_1 dx_2$	$dx_1 dx_2$
Première composante du vecteur contrainte	$-\sigma_{11}(0,0,0) - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}$	$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}$	$-\sigma_{21}(0,0,0) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}$	$\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}$	$-\sigma_{31}(0,0,0) - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}$	$\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}$

20.

En regardant la projection sur le premier vecteur de notre base, on obtient un résultat simple pour la résultante due aux actions extérieures de contact. Le domaine étant infinitésimal, on peut négliger l'intégration.

$$\vec{E}_1 \cdot \int_{\partial D} T(\vec{M}; \vec{n}) ds = \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Le calcul de la projection de la résultante due aux actions extérieures à distance n'est pas compliqué.

$$\vec{E}_1 \cdot \int_{\partial D} \rho \vec{f}(\vec{M}) dv = \rho f_1 dx_1 dx_2 dx_3$$

Et il en va de même pour le calcul de la projection de la résultante dynamique galiléenne

$$\vec{E}_1 \cdot \int_{\partial D} \rho \vec{\gamma}(\vec{M}) dv = \rho \gamma_1 dx_1 dx_2 dx_3$$

L'application du Principe Fondamental de la mécanique nous donne alors une équation scalaire et bien entendu, les calculs faits en projection sur les deux autres axes du repère donnent des résultats similaires

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 &= \rho \gamma_1 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 &= \rho \gamma_2 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 &= \rho \gamma_3 \end{aligned}$$

Ce qui se traduit par l'équation locale de la résultante du Principe Fondamental de la mécanique

$$\vec{\text{div}} \vec{\sigma} + \rho \vec{f}(M, t) = \rho \vec{\gamma}(M, t / R_g)$$

L'avantage de cette démonstration est qu'elle permet d'arriver rapidement résultat concernant l'équation du moment du Principe Fondamental de la mécanique. En effet, en écrivant cette équation au centre de notre domaine, comme de nombreuses forces passent par ce point, nous avons beaucoup de simplifications et l'on constate que l'équation de moment sera réalisée à la condition que le tenseur des contraintes soit symétrique, c'est-à-dire égal à sa transposée.

$$\vec{\sigma}^T = \vec{\sigma}$$

Ainsi, comme le tenseur des déformations, le tenseur des contraintes sera représenté par six composantes indépendantes. Ces deux équations représentent localement le principe fondamental de la mécanique.

$$\vec{\text{div}} \vec{\sigma} + \rho \vec{f}(M, t) = \rho \vec{\gamma}(M, t / R_g) \qquad \vec{\sigma}^T = \vec{\sigma}$$

21.

Avec cette leçon, nous avons mis en application le principe fondamental de la mécanique qui était initialement donné sous une forme globale portant sur un domaine complet. Nous venons d'obtenir des expressions locales, l'une traduisant l'équation de résultante et l'autre traduisant l'équation de moment. Cette dernière démontre que le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique.

3-3 CONTRAINTES

Propriétés des contraintes

1.

Ainsi que nous venons de le voir, l'état de contrainte, tout comme l'état de déformation, est représenté par un tenseur symétrique du second ordre. Nous allons donc pouvoir exploiter les propriétés caractéristiques de ces tenseurs pour obtenir des résultats intéressants.

2.

La relation entre le vecteur contrainte et le tenseur des contraintes nous montre que nous avons affaire à une application linéaire indépendante de la base dans laquelle on l'exprime. C'est la propriété caractéristique des tenseurs.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma} \vec{n}$$

Si on ne change pas un état tensoriel en changeant de base, on peut toutefois remarquer que les composantes du tenseur des contraintes sont étroitement liées à la base de représentation.

$$\sigma_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{T}(\vec{M}; \vec{E}_j) = \vec{E}_i \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{E}_j$$

Dans une autre base, nous pouvons utiliser le même type de formule pour exprimer une composante courante du tenseur contrainte

$$\sigma'_{ij} = \vec{E}'_i \cdot \vec{T}(\vec{M}; \vec{E}'_j) = \vec{E}'_i \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{E}'_j$$

On peut alors utiliser les formules de changement de base pour les vecteurs unitaires

$$\vec{E}'_i = Q_{ij} \vec{E}_j$$

Ce qui nous permet de faire apparaître la matrice de changement de base avec ses propriétés particulières

$$Q_{ij} Q_{kj} = Q_{ji} Q_{jk} = \delta_{ik}$$

En définitive, nous pouvons alors obtenir une formule générale nous permettant de calculer les composantes dans n'importe quelle base, sous réserve de les connaître au moins dans une base.

$$\sigma'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} \sigma_{kl}$$

3.

De toutes les bases, il en est au moins une qui est particulière. Le vecteur contrainte associé à un vecteur de cette base est colinéaire au vecteur initial, le coefficient de colinéarité est appelé contrainte principale.

$$\vec{T}(M, \vec{E}_I) = \vec{\sigma} \vec{E}_I = \sigma_I \vec{E}_I$$

Le calcul de ces contraintes principales, qui ne sont rien d'autre que les valeurs propres du tenseur des contraintes, passe par l'annulation d'un déterminant

$$(\vec{\sigma} - \sigma_I \vec{I}) \vec{E}_I = \vec{0} \Rightarrow \det(\vec{\sigma} - \sigma_I \vec{I}) = 0$$

Dans la base des vecteurs propres $(\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III})$, la matrice représentant l'état des contraintes est diagonale. Les composantes tangentielles sont nulles

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} (\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III})$$

Le tenseur des contraintes étant symétrique, il est possible de démontrer cette relation, dite égalité de Cauchy, valable avec n'importe quel vecteur unitaire.

$$\vec{n} \cdot \overline{T(M; \vec{m})} = \vec{m} \cdot \overline{T(M; \vec{n})}$$

En appliquant la relation précédente avec deux vecteurs propres, on peut constater que, si les valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont nécessairement orthogonaux.

$$\vec{E}_I \cdot \overline{T(M; \vec{E}_{II})} = \vec{E}_{II} \cdot \overline{T(M; \vec{E}_I)} \Rightarrow (\sigma_I - \sigma_{II}) \vec{E}_I \cdot \vec{E}_{II} = 0$$

4.

Comme dans le cas du tenseur des déformations, la décomposition en partie sphérique et déviatorique est unique dès lors que l'on exprime que le tenseur sphérique est proportionnel au tenseur identité et que le tenseur déviatorique a une trace nulle.

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_s + \overline{\sigma}_d \quad \text{tr}(\overline{\sigma}_d) = 0 \quad \text{tr}(\overline{\sigma}) = \text{tr}(\overline{\sigma}_s) \quad \overline{\sigma}_s = \left(\frac{\text{tr} \overline{\sigma}}{3} \right) \overline{I}$$

L'opposé du coefficient de proportionnalité entre le tenseur sphérique et le tenseur identité s'appelle la pression. Cette notion est bien entendu très utile dans le cas des fluides, mais elle aussi exploitée pour des solides, en particulier dans un comportement plastique.

$$p = -\frac{\text{tr}(\overline{\sigma})}{3} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$$

5.

Nous avons vu que le calcul des valeurs propres passe par l'annulation d'un déterminant.

$$\det(\overline{\sigma} - \lambda \overline{I}) = 0$$

Toutefois comme le résultat doit toujours être le même quelque soit la base initialement retenue, le polynôme sera identique. Les coefficients de ce polynôme sont donc invariants par tous changements de base. Le polynôme étant du troisième degré, nous avons donc trois invariants. Le premier invariant est la trace du tenseur des contraintes alors que le troisième est son déterminant. Le deuxième invariant est plus délicat à calculer.

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\overline{\sigma}) = \text{tr}(\overline{\sigma}_s) \\ I_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\text{tr}(\overline{\sigma}) \right)^2 - \text{tr}(\overline{\sigma}^2) \right) \\ I_3 = \det(\overline{\sigma}) \end{cases}$$

On peut aussi trouver des expressions indicielles valables dans toutes bases.

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I \\ I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{cases}$$

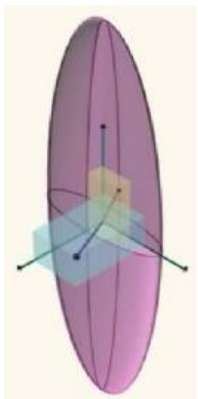
Dans le cas du tenseur déviateur des contraintes, le premier invariant est bien évidemment nul. Nous verrons ultérieurement que son deuxième invariant joue un rôle particulier.

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \left(\overline{\overline{\sigma_D}} \right)^2 - \text{tr} \left(\overline{\overline{\sigma_D}} \right) \text{tr} \left(\overline{\overline{\sigma_D}} \right) \right) = -\frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]$$

6.

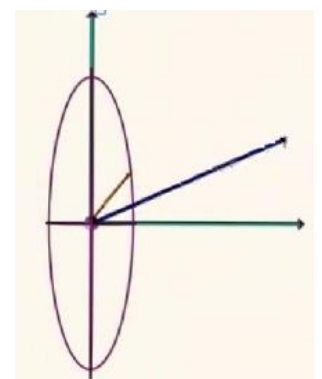
Pour le tenseur des contraintes, on peut bien entendu envisager les mêmes représentations graphiques que pour le tenseur des déformations. La première représentation est celle tridimensionnelle de l'ellipsoïde de Lamé.

Nous allons examiner cette représentation en commençant par concevoir une base orthonormée. On imagine que cette base est la base des vecteurs propres d'un état de contraintes dont on connaît les contraintes principales. Dans ce repère, on peut représenter un vecteur unitaire connu par ses cosinus directeur. Il est aussi possible de positionner le vecteur contrainte associé à ce vecteur unitaire. Toutes ses composantes sont connues.



L'extrémité de ce vecteur se trouve sur l'ellipsoïde de Lamé. Les vecteurs propres de l'état de contrainte présentent aussi les directions principales de l'ellipsoïde. L'intersection de cet ellipsoïde avec les plans principaux nous donnent trois ellipses.

On se rapproche pour examiner cette distribution de plus près. Lorsque le vecteur unitaire évolue, le vecteur contrainte évolue lui aussi. En particulier, lorsque le vecteur unitaire appartient à un plan principal, le vecteur contrainte associé se trouve lui aussi dans ce plan. Son extrémité est sur l'ellipse associée au plan. Et lorsque le vecteur unitaire est confondu avec un vecteur propre, le vecteur contrainte est aussi colinéaire avec ce vecteur propre. On peut aussi regarder en se positionnant perpendiculairement à un plan principal. Cela nous permet de suivre l'évolution en grandeur réelle.



7.

Et bien entendu, il est aussi possible d'utiliser la représentation plane du tri cercle de Mohr.

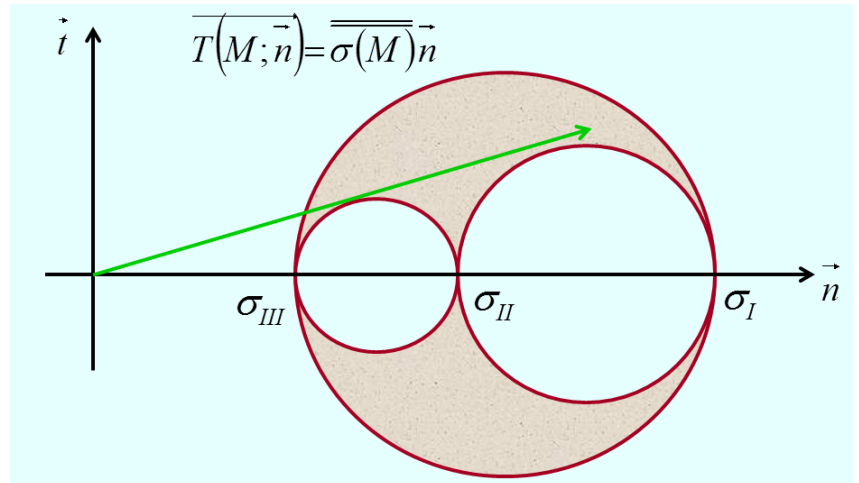
Elle est obtenue en positionnant trois cercles tangents entre eux. Les diamètres sont égaux à la différence de deux valeurs propres et les centres sont situés sur le même axe.

De fait, les intersections des cercles avec cet axe nous donnent les valeurs des contraintes principales.

Pour un vecteur unitaire quelconque, l'extrémité du vecteur contrainte associé se trouve à l'intérieur du tri cercle.

La représentation de Mohr permet d'avoir directement la contrainte normale et le vecteur contrainte tangentielle en vraie grandeur. On peut bien entendu avoir ces entités par des formules.

$$\begin{cases} (\vec{n} \cdot \vec{T}(M; \vec{n}))\vec{n} = \sigma_n(M; \vec{n})\vec{n} \\ \vec{n} \wedge \vec{T}(M; \vec{n}) \wedge \vec{n} = \tau_n(M; \vec{n}) \end{cases}$$



Par convention on ordonne les contraintes principales de la plus grande vers la plus petite.

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

La plus grande contrainte principale est donc la contrainte normale maximale.

$$(\sigma_n)_{MAX} = \sigma_I$$

Le rayon du plus grand des trois cercles donne le module de la contrainte tangentielle maximale.

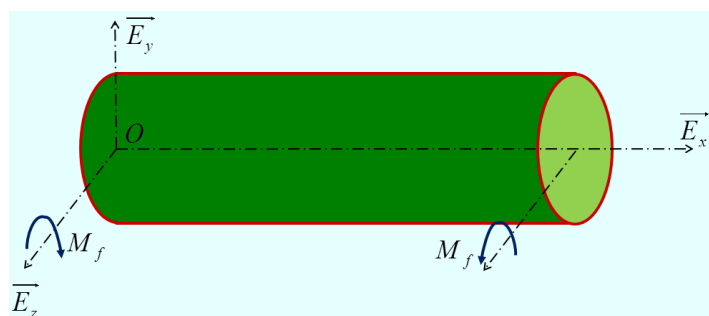
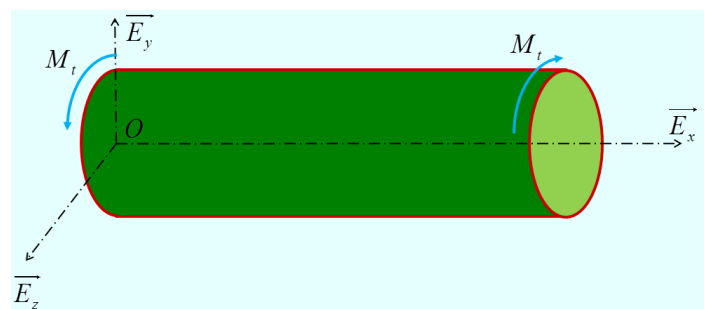
$$(\tau_n)_{MAX} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

8.

En application, nous allons étudier une poutre droite de section circulaire. On lui associe un repère cartésien.

Dans un premier temps nous considérerons que cette poutre est sollicitée en torsion. Nous admettrons qu'en un point quelconque de la poutre, dans une base cylindrique naturelle, le tenseur des contraintes n'a qu'une composante de cisaillement.

$$\overline{\overline{\sigma}}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta)$$



D'autre part, nous appliquons une sollicitation de flexion pure. Cette flexion prise séparément nous donne un tenseur contrainte caractérisé par une composante normale.

$$\overline{\overline{\sigma}}_F = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta)$$

Par application du principe de superposition, le tenseur des contraintes pour la sollicitation combinée de torsion flexion est obtenue par addition terme à terme des composantes des tenseurs des sollicitations simples.

$$\overline{\overline{\sigma}}_{T+F} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta)$$

9.

La structure de ce tenseur contrainte est particulière. On peut en effet facilement vérifier que l'axe radial du repère cylindrique est un axe principal de contrainte, la contrainte principale associée étant nulle.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_r)} = \overline{\overline{\sigma}}_{T+F} \cdot \vec{E}_r = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta) = 0 \cdot \vec{E}_r$$

On peut en déduire que le plan vectoriel contenant le vecteur axial et le vecteur orthoradial est un plan principal. Il y a donc un des trois cercles de Mohr qui est associé à ce plan. Nous allons construire ce cercle en définissant certains de ses points qui représentent l'extrémité du vecteur contrainte image d'un vecteur unitaire pris dans le plan.

10.

Calculons par exemple le vecteur contrainte image du vecteur axial de notre base.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_x)} = \overline{\overline{\sigma}}_{T+F} \cdot \vec{E}_x = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ \tau \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta) = \sigma \cdot \vec{E}_x + \tau \cdot \vec{E}_\theta$$

On va représenter ce vecteur sur le plan de Mohr. Pour cela, on calcule la composante normale du vecteur.

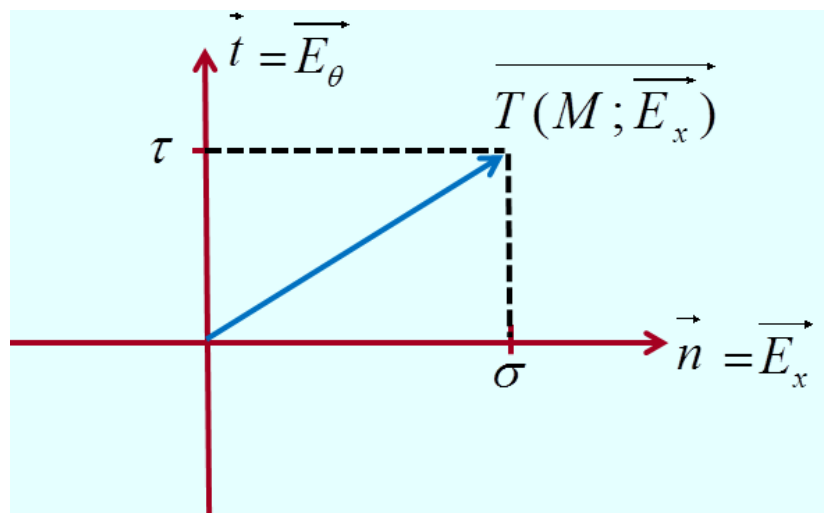
$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_x)} \cdot \vec{E}_x = \sigma$$

Cette composante se trouve sur l'axe normal qui est porté par le vecteur axial.

Après avoir enlevé au vecteur image la composante normale, il reste la composante tangentielle. En l'occurrence, elle est portée par le vecteur orthoradial.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_x)} - \sigma \vec{E}_x = \vec{\tau}_n = \tau \vec{E}_\theta$$

On peut alors représenter le vecteur image du vecteur axial. Ce qui nous donne un premier point situé le cercle de Mohr associé au plan principal.



11.

Pour trouver un deuxième point du cercle, nous allons utiliser le vecteur orthoradial et le vecteur image qui lui est associé.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_\theta)} = \overrightarrow{\sigma_{T+F}} \cdot \vec{E}_\theta = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta) = \tau \cdot \vec{E}_x$$

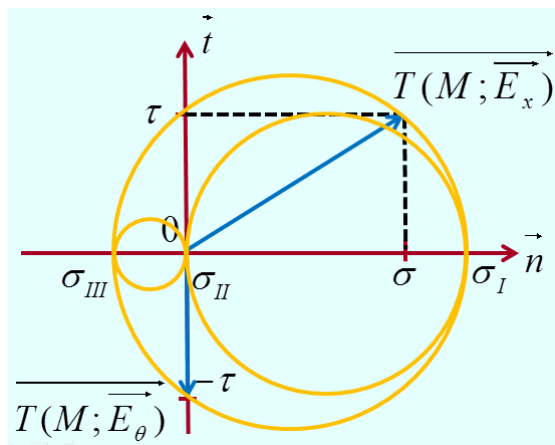
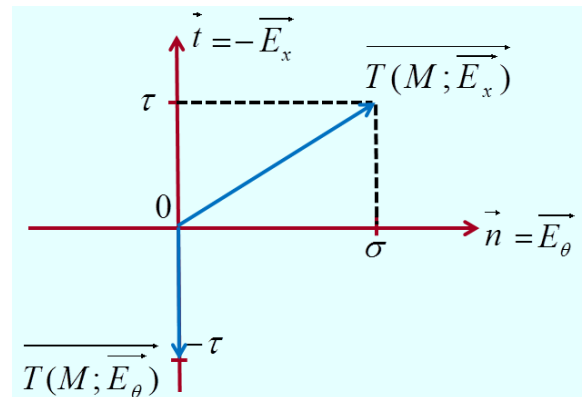
La composante normale est nulle.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_\theta)} \cdot \vec{E}_\theta = 0$$

Elle est logiquement portée par l'axe normal du plan de Mohr qui en l'occurrence est le vecteur orthoradial. En conséquence, le vecteur image est purement tangentiel, le vecteur tangent étant colinéaire au vecteur axial.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_\theta)} - 0 \vec{E}_\theta = \vec{\tau}_n = \tau \vec{E}_x$$

Toutefois nous devons respecter l'orientation entre le vecteur axial et le vecteur orthoradial que nous avons pris pour le premier vecteur image. On peut donc représenter le vecteur image. Cela nous donne un deuxième point du cercle de Mohr.



On peut alors tracer le cercle sachant que son centre est situé à l'intersection de la médiatrice des deux points et de l'axe horizontal du plan de Mohr.

L'intersection du cercle avec cet axe horizontal nous donne deux valeurs propres de signes opposées. On sait que la troisième valeur propre, associée au vecteur propre confondu avec la direction radiale, est nulle.

Cela nous permet de représenter les deux autres cercles de Mohr.

12.

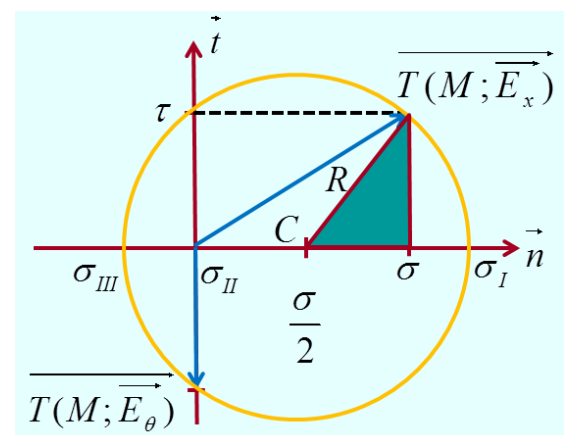
Pour le calcul des valeurs propres extrémales, il faut travailler à partir du plus grand des cercles.

Par construction, on connaît l'abscisse du centre. Le théorème de Pythagore nous permet de calculer facilement le rayon.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Et l'on peut en déduire les valeurs propres.

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \sigma_{III} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$



Et l'on connaît l'état de contrainte dans la base principale.

$$\overline{\overline{\sigma_{T+F}}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta) = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} (\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III})$$

La méthode utilisée pour arriver à ce résultat est graphique, mais bien entendu, il est possible d'utiliser une méthode analytique. Avec cette petite application, on peut remarquer que la contrainte tangentielle due à la torsion contribue à l'augmentation de la contrainte normale maximale, tout comme la contrainte normale de flexion augmente la contrainte tangentielle maximale.

$$(\sigma_n)_{MAX} = \sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (\tau_n)_{MAX} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

13.

Cette leçon nous aura permis de mieux comprendre la notion de contrainte. L'utilisation du principe de superposition va nous permettre de nous ramener à l'étude de cas simples qui pourront ensuite être combinés pour former un état plus complexe.

3-4 CONTRAINTES

Application

Enoncé

Théorie des poutres : état de contrainte

On considère une poutre droite de section droite constante.



Le domaine est donc un cylindre droit à base quelconque d'axe $(O; \vec{E}_1)$.

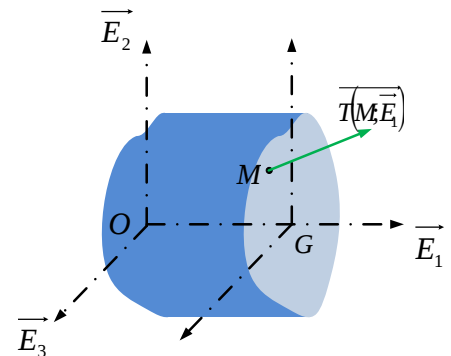
Les axes $(O; \vec{E}_2)$ et $(O; \vec{E}_3)$ sont les axes principaux quadratiques de la section droite du cylindre. L'axe $(O; \vec{E}_1)$ représente la ligne des barycentres des sections droites. Les dimensions transversales (dans le plan $\vec{E}_1, \vec{E}_2$) sont très faibles devant la dimension longitudinale. Le domaine n'est sollicité que par des chargements ponctuels appliqués sur la surface extérieure.

Avec ces hypothèses, on admet que le tenseur des contraintes en un point M quelconque de la poutre se présente sous la forme générique suivante :

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Cela nous permet de préciser la répartition du vecteur contrainte dans un plan de section droite.

$$\vec{T}(M; \vec{E}_1) = \overline{\overline{\sigma(M)}} \vec{E}_1 = \sigma_{11} \vec{E}_1 + \sigma_{12} \vec{E}_2 + \sigma_{13} \vec{E}_3$$



Ce vecteur représente la densité surfacique des efforts exercés au niveau du plan de coupe par la partie enlevée sur la partie restante. A cette distribution d'effort on peut associer un torseur d'effort appelé torseur des efforts intérieur et qui nous permettra de définir les composantes de la sollicitation.

$$\vec{R} = \int_S \vec{T}(M; \vec{E}_1) ds = N \vec{E}_1 + T_2 \vec{E}_2 + T_3 \vec{E}_3$$

$$\vec{M}_G = \int_S \vec{GM} \wedge \vec{T}(M; \vec{E}_1) ds = M_t \vec{E}_1 + M_{f_2} \vec{E}_2 + M_{f_3} \vec{E}_3$$

Cela nous donne alors des relations permettant d'établir la sollicitation sur la poutre en fonction du tenseur des contraintes

$$N = \int_S \sigma_{11} ds ; Mt = \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) ds$$

$$T_2 = \int_S \sigma_{12} ds ; Mf_2 = - \int_S x_3 \sigma_{11} ds$$

$$T_3 = \int_S \sigma_{13} ds ; Mf_3 = \int_S x_2 \sigma_{11} ds$$

Donc dans ce tenseur :

- σ_{11} est la contrainte normale. Elle est fonction de l'effort de traction – compression N et des deux composantes du moment de flexion Mf_2 et Mf_3 .
- σ_{12} est la composante de la contrainte tangentielle dans la direction du vecteur $\vec{E}_2$. Elle est fonction de la composante de l'effort tranchant T_2 et du moment de torsion Mt .
- σ_{13} est la composante de la contrainte tangentielle dans la direction du vecteur $\vec{E}_3$. Elle est fonction de la composante de l'effort tranchant T_3 et du moment de torsion Mt .

QUESTIONS

1- La poutre est sollicitée en traction simple. Donner le tenseur des contraintes en un point quelconque en admettant les résultats de la théorie des poutres. Vérifier ensuite les équations d'équilibre.

2- On considère cette fois une sollicitation de flexion pure (sans effort tranchant). Le moment de flexion est dirigé selon le vecteur $\vec{E}_3$. Donner à nouveau le tenseur des contraintes et vérifier les équations d'équilibre.

3- On admet que dans le cas d'une sollicitation avec effort tranchant T_2 (flexion simple), la contrainte tangentielle est donnée par la formule :

$$\tau = \frac{T_2 A(x_2)}{I_{G3} b(x_2)} \begin{cases} T_2 & \text{Effort tranchant} \\ I_{G3} & \text{Moment quadratique} \\ A(x_2) & \text{Moment statique} \\ b(x_2) & \text{Largeur} \end{cases}$$

A quelle(s) condition(s) les équations d'équilibre seront-elles vérifiées dans le cas d'une flexion simple?

Peut-on vérifier les équations d'équilibre avec une poutre de section rectangulaire? Avec une poutre de section circulaire?

4- Les équations d'équilibre peuvent-elles être satisfaites dans le cas de la torsion d'une poutre de section droite circulaire?

Donner l'expression du tenseur des contraintes dans la base cylindrique.

5- Pouvons-nous, dans le cas de la flexion pure par exemple, proposer d'autres répartitions de contrainte que celle donnée par la théorie des poutres?

14.

Nous allons regarder une application sur l'état de contrainte à partir d'un exercice basé sur des résultats de la théorie des poutres.

15.

Voici l'énoncé de l'exercice. Les auditeurs sont invités à apporter des réponses de façon autonome puis à valider la solution en regardant les réponses. Le domaine d'étude est une poutre, c'est-à-dire un corps dont l'une des dimensions est très grande devant les deux autres.

Avec ces différentes hypothèses le tenseur des contraintes prend une forme simple. Toutefois cette forme ne permet pas de déduire des directions principales de contraintes. La valeur des composantes des contraintes est directement dépendante de la nature de la sollicitation exercée sur la poutre.

Au fil de l'exercice nous examinerons chaque sollicitation simple afin de valider, ou non, les formules données par la théorie des poutres. Nous profiterons de la sollicitation de torsion pour examiner les formes du tenseur des contraintes en fonction de la base d'étude. Enfin nous terminerons en regardant si d'autres distributions de contraintes peuvent être envisagées.

16.

Pour la sollicitation de traction, seule la contrainte normale est non nulle. D'après la théorie des poutres elle est égale au quotient de l'effort normal par l'aire de la section droite.

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S}$$

Donc le tenseur des contraintes dans la base d'étude n'a qu'une seule composante non nulle.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} N/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Il reste à regarder si les équations d'équilibres peuvent être satisfaites.

$$\rho \vec{\gamma}(M, t / R_g) = \vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \rho \vec{f}(M, t)$$

Le domaine est en équilibre ce qui implique que le terme d'accélération est nul. Comme le chargement n'est appliqué que sur la surface extérieure du domaine, le vecteur force de volume par unité de volume est nul aussi. Donc le tenseur des contraintes est un tenseur à divergence nulle.

$$\vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} = \vec{0}$$

Avec la forme du tenseur contrainte en traction et compte tenu du fait que la seule contrainte non nulle est constante il est évident que la divergence du tenseur contrainte est nulle.

17.

Pour avoir de la flexion pure, il faut que le moment de flexion soit constant dans la direction de la poutre $\vec{E}_1$. Dans le cas de la flexion pure nous n'avons à nouveau que la contrainte normale qui est non nulle. Par contre elle n'est plus constante dans une section droite et elle est une fonction linéaire de la distance du point d'étude à l'axe de flexion.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} \quad \sigma_{11} = \frac{Mf_3 x_2}{I_{G3}}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment le principe fondamental de la mécanique nous conduit à avoir une divergence du tenseur des contraintes nulles.

$$\vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} = \vec{0}$$

Le moment de flexion Mf_3 est indépendant de la variable de position axiale x_1 . Il en est de même pour le moment quadratique car la section droite de la poutre est constante. Donc la première composante du tenseur des contraintes est indépendante de x_1 et nos équations d'équilibre sont satisfaites.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0$$

18.

Dans le cas de la flexion simple, l'effort tranchant n'est pas nul et il est directement dépendant de la variation du moment de flexion le long de la poutre.

$$T_2 = - \frac{\partial Mf_3}{\partial x_1}$$

De fait nous avons des contraintes tangentielles σ_{12} portées par la direction $\vec{E}_2$. Avant d'examiner la proposition de distribution de ces contraintes tangentielles, regardons ce que nous donne une hypothèse de distribution uniforme, c'est-à-dire indépendante des coordonnées (x_2, x_3) du point dans la section droite, à l'image de la distribution des contraintes normales dans le cas de la traction.

$$\sigma_{12} = \tau = \frac{T_2}{S}$$

Le tenseur des contraintes a donc deux composantes indépendantes non nulles.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, le principe fondamental de la mécanique nous conduit à un tenseur contrainte à divergence nulle ce qui nous amène à examiner deux équations scalaires, la troisième étant vérifiée.

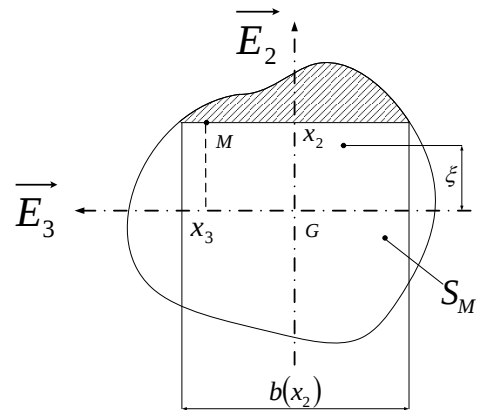
$$\vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} = \vec{0} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned}$$

Avec des contraintes tangentielles constantes, la deuxième équation ne pose aucun problème mais par contre on se rend compte que la première équation ne peut pas être satisfaite. Le principe fondamental de la mécanique n'étant pas réalisé, il faut revoir nos hypothèses.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{Mf_3 x_2}{I_{G3}} \right) = \frac{x_2}{I_{G3}} \frac{\partial Mf_3}{\partial x_1} = - \frac{x_2 T_2}{I_{G3}}$$

19.

Nous allons donc reprendre l'étude en utilisant l'hypothèse de distribution de contraintes tangentielles proposée dans l'énoncé. Dans la formule on retrouve des grandeurs déjà connues et le moment statique de la partie de la section droite à coordonnée inférieure au point d'étude par rapport à l'axe d'orientation $\vec{E}_3$ passant par l'iso barycentre. Ce qui correspond à la surface S_M c'est-à-dire à la zone non hachurée de la section.



$$A(x_2) = \int_{S_M} \xi \, ds$$

Cette fois la contrainte tangentielle est donnée par la formule de Bredt

$$\sigma_{12} = \frac{T_2 A(x_2)}{I_{G3} b(x_2)}$$

L'application du principe fondamental de la mécanique nous donne un résultat similaire au précédent

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0$$

Ceci nous donne alors deux conditions d'équilibre

$$-\frac{x_2 T_2}{I_{G3}} + \frac{T_2}{I_{G3}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A}{b} \right) = 0 \quad \frac{A}{I_{G3} b} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} = 0$$

La première condition nous impose une relation sur la géométrie de la section droite. La deuxième condition nous impose une relation sur le chargement. Cette dernière se traduit par le fait que l'effort tranchant doit être constant ce qui exclut par exemple des chargements en flexion de la poutre par une distribution linéique d'effort.

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A}{b} \right) = x_2 \frac{\partial T_2}{\partial x_1} = 0$$

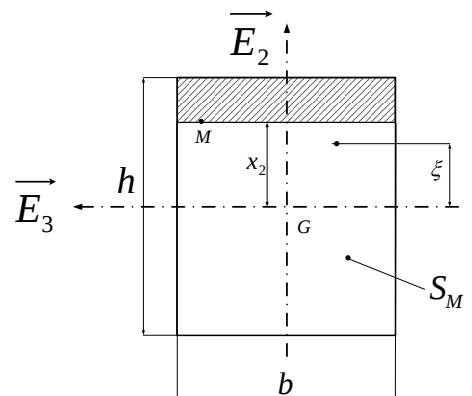
20.

Nous allons traiter le cas de la section rectangulaire de hauteur h et de largeur b afin de savoir si la condition géométrique est satisfaite. Il faut tout d'abord évaluer le moment statique

$$A(x_2) = \int_{S_M} \xi \, ds = \int_{-h/2}^{x_2} \xi b \, d\xi = \frac{b}{2} [\xi^2]_{-h/2}^{x_2} = \frac{b}{2} \left(x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

On peut alors constater que la condition d'équilibre est satisfaite.

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A}{b} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) = x_2$$



21.

Pour la section circulaire, le calcul est un peu plus complexe car la largeur b de la section est fonction de la variable de position x_2 . En utilisant le théorème de Pythagore, on peut obtenir cette fonction.

$$b(x_2) = 2\sqrt{R^2 - x_2^2}$$

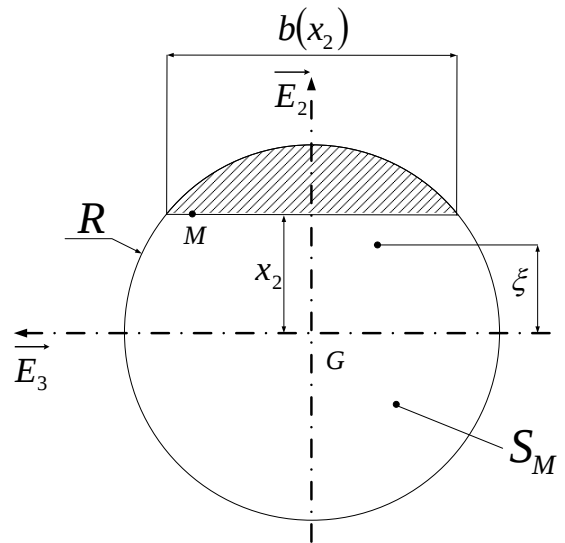
Cette dernière relation nous permet de faire le calcul du moment statique.

$$A(x_2) = \int_{S_M} \xi \, ds = \int_R^{x_2} \xi \, b(\xi) \, d\xi$$

$$A(x_2) = 2 \int_R^{x_2} \xi \sqrt{R^2 - \xi^2} \, d\xi$$

$$A(x_2) = -2 \left[\frac{1}{3} (R^2 - \xi^2)^{3/2} \right]_R^{x_2}$$

$$A(x_2) = -\frac{2}{3} (R^2 - x_2^2)^{3/2}$$



Et on constate alors que la condition d'équilibre ne peut pas être satisfaite. En définitive, la relation de distribution des contraintes tangentielles de Bredt permet de satisfaire aux équations d'équilibre dans le cas d'une poutre droite à chargement de flexion non réparti linéairement dans le cas d'une section rectangulaire. Par contre dans bien d'autre cas les équations d'équilibre ne sont pas satisfaites. En pratique, la détermination des contraintes tangentielles dues à un effort tranchant est très délicate. Toutefois, comme la valeur maximale de contrainte tangentielle donnée par la formule de Bredt est assez proche de la valeur maximale réelle, on utilise souvent cette formule.

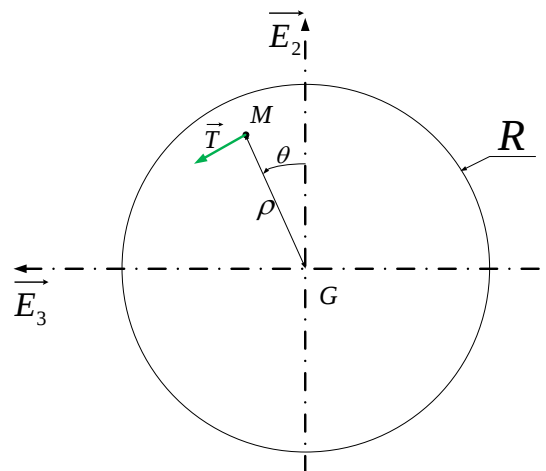
$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A}{b} \right) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (R^2 - x_2^2) = \frac{2}{3} x_2 \neq x_2$$

22.

Dans le cas d'une poutre droite de section circulaire la théorie de la torsion nous indique que la contrainte normale est nulle et qu'il n'y a donc qu'une contrainte tangentielle. De plus ce vecteur contrainte, contenu dans le plan de section droite, est ortho radial, c'est-à-dire orthogonal au rayon vecteur, et son module est proportionnel à la distance du point d'étude par rapport à l'axe de torsion.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{E_1} \\ \overrightarrow{E_2} \\ \overrightarrow{E_3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \tau \vec{E}_\theta = r \frac{Mt}{I_G} \vec{E}_\theta$$



A nouveau le principe fondamental de la mécanique nous conduit à un tenseur des contraintes qui doit avoir une divergence nulle, ce qui nous donne trois conséquences scalaires.

$$\vec{\text{div}} \vec{\sigma} = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0 \end{array} \right.$$

Pour exploiter ces dernières relations, il faut calculer les composantes des contraintes tangentielles dans la base d'étude cartésienne. Pour cela un simple changement du vecteur convient. Il ne faut pas oublier de faire aussi le changement de variables.

$$\vec{T} = \tau \vec{E}_\theta = \tau (-\sin \theta \vec{E}_2 + \cos \theta \vec{E}_3)$$

$$\sigma_{12} = -\tau \sin \theta = -\frac{Mt}{I_G} \rho \sin \theta = -\frac{Mt}{I_G} x_3$$

$$\sigma_{13} = \tau \cos \theta = \frac{Mt}{I_G} \rho \cos \theta = \frac{Mt}{I_G} x_2$$

Avec toutes ces relations, on constate que le principe fondamental de la mécanique sera satisfait si le moment de torsion est constant le long de la poutre. En cas contraire la distribution proposée par la théorie des poutres n'est pas convenable.

$$\frac{\partial Mt}{\partial x_1} = 0$$

23.

Compte tenu de la symétrie de révolution du domaine, il peut être logique de s'interroger sur les composantes dans une base cylindrique. Pour cela il faut commencer par définir le changement de base et le changement de coordonnées ou de variables.

$$\vec{OM} = x_1 \vec{E}_1 = \rho \vec{E}_r + z \vec{E}_z$$

$$\vec{E}_r = \cos \theta \vec{E}_2 + \sin \theta \vec{E}_3$$

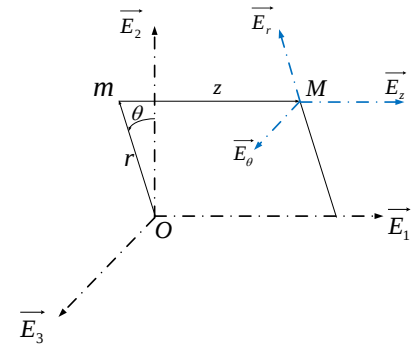
$$\vec{E}_\theta = -\sin \theta \vec{E}_2 + \cos \theta \vec{E}_3$$

$$\vec{E}_z = \vec{E}_1$$

$$x_1 = z$$

$$x_2 = r \cos \theta$$

$$x_3 = r \sin \theta$$



Le tenseur des contraintes est donné dans la base d'étude qui est cartésienne mais il admet aussi un représentant matriciel dans la base cylindrique.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \frac{Mt}{I_G} \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

Pour obtenir les composantes du tenseur des contraintes dans la base cylindrique, on peut utiliser la relation de changement de base.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}}_{r\theta z} = P^{-1} \overline{\overline{\sigma(M)}}_{123} P$$

Pour cela il faut définir correctement la matrice de passage.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir fait un double produit de matrice et utilisé les relations de changement de variables, on constate que le représentant matriciel de l'état de contrainte dans la base cylindrique est très simple.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

24.

Ce résultat aurait aussi pu être obtenu en remarquant que les colonnes du tenseur des contraintes représentent les vecteurs contraintes dans les directions associées aux vecteurs unitaires de la base d'étude.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z) \quad \begin{aligned} \overline{T(M; \vec{E}_r)} &= \sigma_{rr} \vec{E}_r + \sigma_{r\theta} \vec{E}_\theta + \sigma_{rz} \vec{E}_z \\ \overline{T(M; \vec{E}_\theta)} &= \sigma_{\theta r} \vec{E}_r + \sigma_{\theta\theta} \vec{E}_\theta + \sigma_{\theta z} \vec{E}_z \\ \overline{T(M; \vec{E}_z)} &= \sigma_{zr} \vec{E}_r + \sigma_{z\theta} \vec{E}_\theta + \sigma_{zz} \vec{E}_z \end{aligned}$$

Calculons par exemple le vecteur contrainte associé à la direction radiale. Comme nous connaissons le tenseur des contraintes dans la base cartésienne, nous faisons le calcul dans cette base.

$$\overline{T(M; \vec{E}_r)} = \overline{\overline{\sigma(M)}} \vec{E}_r = \frac{\tau}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{\tau}{\rho} \begin{pmatrix} -x_3 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Il faut maintenant transférer le vecteur dans la base cylindrique. Toutefois l'emploi des relations de changement de variables nous démontre que ce vecteur est nul.

$$\overline{T(M; \vec{E}_r)} = \frac{\tau}{\rho} (-x_3 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \vec{E}_1 = \vec{0}$$

Donc dans la base cylindrique, les composantes situées sur la première ligne du tenseur des contraintes sont nulles. Du fait de la symétrie, il en est de même pour les composantes situées sur la première colonne.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

On peut maintenant faire le calcul du vecteur contrainte associé à la direction orthoradiale.

$$\overline{T(M; \vec{E}_\theta)} = \overline{\overline{\sigma(M)}} \vec{E}_\theta = \frac{\tau}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{\tau}{\rho} \begin{pmatrix} x_3 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

A nouveau, en faisant le changement de base et de variables sur le vecteur obtenu, on a un résultat final très simple.

$$\overline{T(M; \vec{E}_\theta)} = \frac{\tau}{\rho} (x_3 \sin \theta + x_2 \cos \theta) \vec{E}_1 = \tau \vec{E}_1 = \tau \vec{E}_z$$

Cela nous donne encore de nouvelles composantes de notre tenseur contrainte dans la base cylindrique.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

En définitive, il ne reste plus qu'une composante à déterminer. On pourrait utiliser la méthode précédente et calculer le vecteur contrainte dans la direction axiale, mais il est plus simple d'utiliser le fait que la trace du tenseur est un invariant par changement de base. Comme cette trace est nulle dans la base cartésienne, on en déduit que la composante manquante est nulle. Ce qui nous donne le représentant de notre tenseur dans la base cylindrique.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

25.

Pour imaginer de nouvelles distributions de contraintes dans le cas de la flexion pure, il faut se référer au principe fondamental de la mécanique.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0$$

Donc la première composante du tenseur des contraintes dans la base d'étude doit être indépendante de la coordonnée axiale. Toutefois cela n'est pas suffisant car il faut respecter le lien avec les composantes du torseur des efforts intérieurs.

$$N = \int_S \sigma_{11} ds = 0 ; Mt = \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) ds = 0$$

$$T_2 = \int_S \sigma_{12} ds = 0 ; Mf_2 = - \int_S x_3 \sigma_{11} ds = 0$$

$$T_3 = \int_S \sigma_{13} ds = 0 ; Mf_3 = \int_S x_2 \sigma_{11} ds \neq 0$$

Ceci étant on peut néanmoins envisager des fonctions contraintes permettant d'obtenir le résultat souhaité. Ainsi il est aisé de constater que, dans le cas d'une section symétrique par rapport à l'axe de flexion, une distribution cubique de la contrainte normale satisfait aux différentes conditions énoncées. En fait nous verrons par la suite qu'il n'existe qu'une seule solution à un problème donné. Ceci est dû au fait qu'il existe un lien entre l'état de déformation et l'état de contrainte.

$$\sigma_{11} = k x_2^3$$

26.

Cet exercice nous a permis de constater quelques liens avec la théorie des poutres. On se rend compte qu'il n'est pas si évident d'avoir un état de contrainte satisfaisant au principe fondamental de la mécanique. Les formules proposées dans le cadre de la théorie des poutres ne donnent pas toujours satisfaction. Mais il faut prendre conscience que souvent ces formules donnent des résultats proches de la réalité et qu'elles sont suffisantes dans bien des applications.

