

Mécanique des solides déformables

Auteur
Michel MAYA

2 – Déformations

Ce cours est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons
Paternité + Pas d'utilisation commerciale + Pas de modification 4.0 International



2-1 DEFORMATIONS

Grandes déformations

1.

On peut aborder la mécanique des milieux continus soit par le coté cinématique, avec les déplacements et les déformations, soit par le coté statique, avec les forces et les contraintes. Comme nous allons le constater, bien qu'étant indépendantes, ces deux visions présentent de nombreux points communs et une grande dualité. Toutefois, l'aspect cinématique nous permettant d'aborder la notion de tenseurs sous une forme plus physique et plus facilement compréhensible par l'étudiant, c'est par cette approche que nous allons commencer notre présentation.

2.

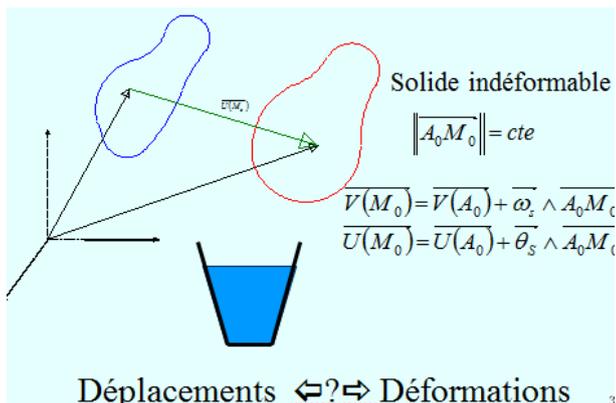
En bon mécanicien, nous allons prendre dans notre caisse à outils les éléments indispensables pour travailler ce chapitre. Ils ne sont pas très nombreux.

Nous aurons besoin de trois clous afin de bien positionner les points d'étude dans notre domaine. Et pour les planter, nous prendrons un marteau. Par mesure de prudence vis-à-vis de nos doigts, les clous seront assez gros et le marteau assez petit. Enfin il nous faut deux élastiques. Ils seront tendus entre deux clous. Mais attention, ce sont des élastiques avec des propriétés très particulières. Ils doivent être infiniment petits et infiniment étirables. Afin de vous rassurer un peu, il est bon d'indiquer que tous ces outils, marteau compris, peuvent être parfaitement virtuels. Il faudra alors simplement faire marcher un peu plus l'imagination.



3.

Nous allons essayer de trouver des liens entre la notion de déplacement et celle des déformations.



En premier lieu, il convient de bien réaliser que nous pouvons tout à fait déplacer un domaine matériel sans pour autant avoir engendré des déformations au sein de ce domaine. La mécanique des solides indéformables est là pour nous le rappeler. La distance entre deux points étant une constante, le champ des vitesses est un champ de torseur. Et, dans le cas de très petits déplacements, on obtient aussi un champ de torseur pour les déplacements, champ caractérisé par une résultante et un moment en un point.

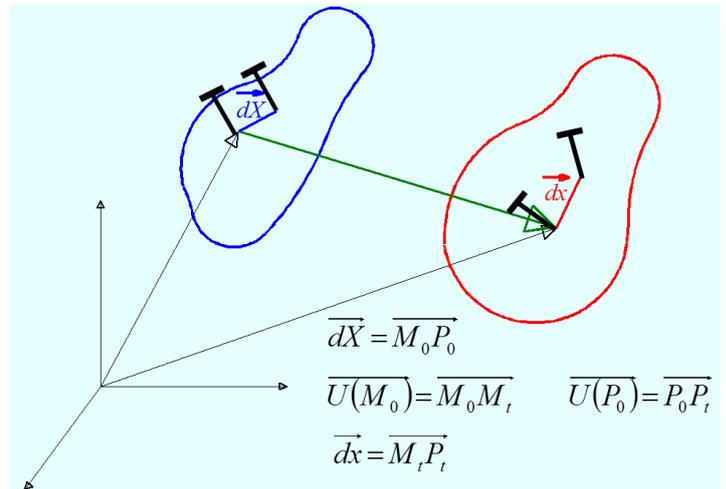
On peut noter que le domaine peut fort bien être un domaine fluide par exemple contenu dans un seau auquel on fait suivre une trajectoire rectiligne à une vitesse uniforme. Nous n'avons toujours pas créé de déformation.

Il faut donc trouver dans le champ de déplacement les propriétés qui vont permettre d'engendrer des déformations. Et le problème est complexe, car, comme nous allons le constater, il peut exister de multiples déformations en chaque point de l'espace, alors que pour chaque point le vecteur déplacement est unique. La notion de déformation ne peut pas être simplement représentée par un vecteur et nous devons employer une nouvelle entité, le tenseur, pour la définir.

4.

Pour déterminer physiquement l'état de déformation en un point M_0 , nous allons le positionner dans la configuration de référence.

Ensuite, nous considérons, toujours dans la configuration de référence un nouveau point P_0 , infiniment proche du point précédent. Avec notre gros marteau, sans nous faire mal, nous plantons un clou en chacun de ces points. Ces clous vont servir d'attaches à un élastique tendu entre les deux points M_0 et P_0 . On obtient ainsi le vecteur $\overline{dX} = \overline{M_0P_0}$ qui est défini dans la configuration de référence. Puis nous transformons notre domaine en lui imposant un champ de déplacement. Dans la configuration actuelle, déterminée à l'instant t , on trouve les points images des précédents, à savoir les points M_t et P_t . Pour le point M_0 , son vecteur déplacement est $\overline{U(M_0)} = \overline{M_0M_t}$. De même pour le point P_0 $\overline{U(P_0)} = \overline{P_0P_t}$. Donc, dans la configuration actuelle, on peut déterminer la position de notre élastique par le vecteur $\overline{dx} = \overline{M_tP_t}$

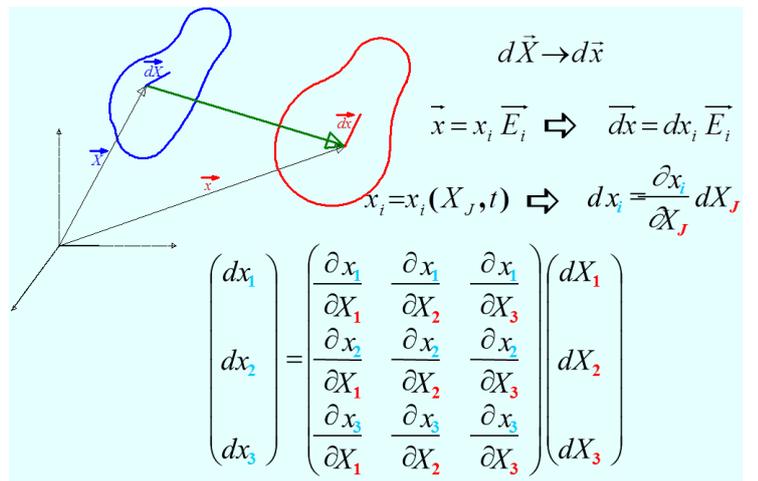


5.

Nous voulons donc maintenant rechercher les liens entre le vecteur initial \overline{dX} pris dans la configuration de référence et son image par le champ de déplacement dans la configuration actuelle soit le vecteur \overline{dx} .

Pour cela nous allons tout simplement différentier dans l'espace le vecteur position actuelle. En prenant comme hypothèse que ce dernier est connu par ses composantes dans un repère cartésien $\vec{x} = x_i \vec{E}_i$ et que dans ce cas les vecteurs de base sont invariants, le vecteur image \overline{dx} sera obtenu tout simplement en différenciant les composantes $\overline{dx} = dx_i \vec{E}_i$

Ces dernières sont dépendantes de la position initiale du point d'étude et l'on a une forme



différentielle spatiale qui est donnée en considérant les variations vis-à-vis des variables de position initiales, c'est-à-dire en considérant la différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Par convention, les indices majuscules sont liés à la configuration de référence et les indices minuscules sont liés à la configuration actuelle.

Cette dernière relation indicielle peut encore être présentée sous forme matricielle.

6.

La matrice que l'on vient de faire apparaître représente dans notre base les composantes d'un tenseur noté **F** et dénommé **Tenseur gradient** ou encore **Application linéaire tangente**. Il permet de calculer notre vecteur image connaissant le vecteur dans la configuration initiale.

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}$$

Il est aussi possible de partir de la relation inverse.

$$dX_I = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} dx_j \quad F^{-1}_{Ij} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} \quad d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x}$$

Et nous pouvons aussi relier ce tenseur à notre champ de déplacement. Pour cela, il suffit d'écrire que le vecteur déplacement est la différence entre le vecteur position dans la configuration actuelle et le vecteur position dans la configuration de référence.

$$\vec{u}(X_j, t) = \vec{OM}_t - \vec{OM}_0 = \vec{x} - \vec{X}$$

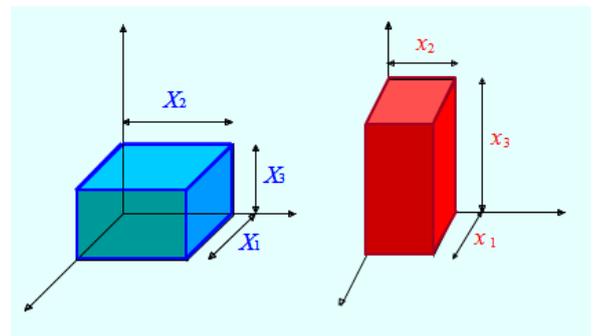
On fait alors apparaître une nouvelle entité qui est le tenseur gradient du vecteur déplacement.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{Grad} \vec{U}$$

7.

Afin de fixer un peu les idées nous allons regarder comment on peut calculer les composantes du tenseur gradient dans le cas d'une transformation très simple : la déformation homogène triaxiale.

Pour cette déformation, un parallélépipède rectangle construit selon les axes des vecteurs de base se transforme en un nouveau parallélépipède rectangle.



8.

Les équations de cette transformation sont très simples. Elles traduisent une proportionnalité entre les coordonnées actuelles et les coordonnées de référence.

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 X_1 \\ x_2 = \lambda_2 X_2 \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases}$$

Par simple dérivation des coordonnées actuelles, on peut obtenir les composantes du tenseur gradient. Ce dernier prend une forme diagonale.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

En faisant l'hypothèse que le volume dans la configuration de référence est unitaire, le volume dans la configuration actuelle est donné par le produit des valeurs du tenseur.

$$dv_0 = 1 \Rightarrow dv = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 dv_0$$

Il correspond aussi au déterminant de la matrice. Ce résultat, constaté sur cet exemple, sera généralisable. Le déterminant du tenseur gradient donne la variation relative de volume dans notre transformation.

$$dv = J dv_0 \quad J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det \mathbf{F}$$

9.

On constate que le tenseur gradient ne peut pas être représentatif de l'état de déformation. Pour un solide sans déformation, il est non nul.

Solide indéformable, si transformation infinitésimale :

$$\overline{U(M_0)} = \overline{U(A_0)} + \overline{\theta_s} \wedge \overline{A_0 M_0}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{A1} \\ u_{A2} \\ u_{A3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_{S1} \\ \theta_{S2} \\ \theta_{S3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 - X_{A1} \\ X_2 - X_{A2} \\ X_3 - X_{A3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{A1} + \theta_{S2}(X_3 - X_{A3}) - \theta_{S3}(X_2 - X_{A2}) \\ u_{A2} + \theta_{S3}(X_1 - X_{A1}) - \theta_{S1}(X_3 - X_{A3}) \\ u_{A3} + \theta_{S1}(X_2 - X_{A2}) - \theta_{S2}(X_1 - X_{A1}) \end{pmatrix}$$

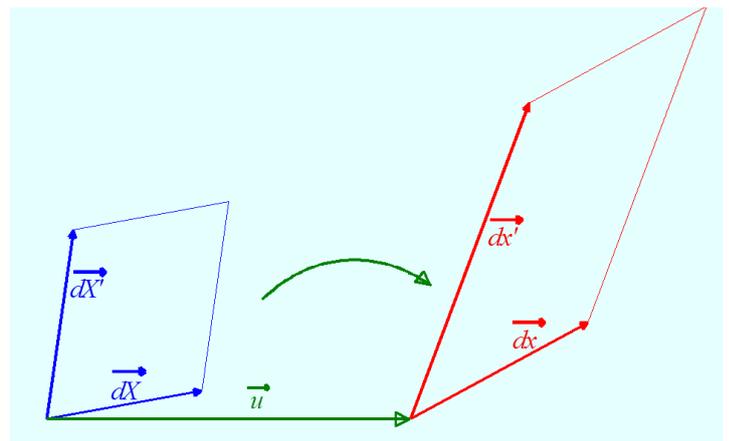
$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_{S3} & \theta_{S2} \\ \theta_{S3} & 1 & -\theta_{S1} \\ -\theta_{S2} & \theta_{S1} & 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

$\det \mathbf{F} \approx 1$

10.

Pour caractériser les déformations, il faut traduire le fait que les distances entre deux points et les angles entre deux directions vont changer lors de la transformation. Pour cela nous allons utiliser le produit scalaire de deux vecteurs qui est fonction à la fois de la norme de ces vecteurs, donc des distances entre deux points, et de l'angle formé entre ces vecteurs.

Nous considérons deux vecteurs pris dans la configuration de référence. Afin de bien les repérer, nous plantons des clous aux extrémités des vecteurs et nous tendons des élastiques entre deux clous. Nous imposons ensuite le champ de déplacement à notre domaine. Nos clous et élastiques vont alors se positionner dans la configuration actuelle. Les nouveaux vecteurs dans la configuration actuelle sont symbolisés par la position des clous. Les variations de longueur des élastiques permettent de visualiser les élongations. On peut aussi visionner la variation de l'angle initialement formé entre les deux vecteurs.



11.

Avec le tenseur gradient, nous avons vu que nous pouvons calculer des vecteurs images à partir de vecteurs définis dans la configuration de référence.

Le produit scalaire de deux vecteurs est obtenu sous forme matricielle en transposant le représentant du premier vecteur.

$$d\bar{x}^T \cdot d\bar{x}' = (F d\bar{X})^T F d\bar{X}'$$

En développant le calcul, on voit alors apparaître une nouvelle matrice, représentant d'un tenseur appelé le Tenseur de Cauchy Green droit.

$$d\bar{x}^T \cdot d\bar{x}' = (d\bar{X})^T F^T \bar{\otimes} F d\bar{X}' = (d\bar{X})^T C d\bar{X}'$$

Il est obtenu en faisant le produit du tenseur gradient transposé avec le tenseur gradient.

$$C = F^T \bar{\otimes} F$$

12.

La forme développée du calcul matriciel montre bien la nécessité de transposer le premier vecteur si l'on veut obtenir une fonction scalaire.

$$d\bar{x}^T \cdot d\bar{x}' = (d\bar{X})^T C d\bar{X}' = \begin{pmatrix} dX_1 & dX_2 & dX_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX'_1 \\ dX'_2 \\ dX'_3 \end{pmatrix}$$

Le calcul des composantes indicielles montre que le tenseur obtenu est symétrique.

$$C_{JK} = F_{iJ} F_{iK} = F_{Ji} F_{iK}$$

Il peut être calculé directement à partir du champ de déplacement et du tenseur gradient du déplacement. En transposant la dernière expression, on obtient le même résultat, ce qui prouve à nouveau la symétrie du tenseur de Cauchy Green droit.

$$C = I + \mathbf{Grad} \bar{U} + (\mathbf{Grad} \bar{U})^T + (\mathbf{Grad} \bar{U})^T \bar{\otimes} \mathbf{Grad} \bar{U}$$

13.

Ayant maintenant tous les outils nécessaires, on peut envisager de calculer la variation de notre produit scalaire lors de la transformation.

Cela nous permet de mettre en lumière un nouveau tenseur appelé tenseur de Green Lagrange. C'est aussi un tenseur symétrique.

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' - d\bar{X} \cdot d\bar{X}' = 2d\bar{X} \mathbf{E} d\bar{X}'$$

Son expression est donnée par une formulation tensorielle.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \bar{U} + (\mathbf{Grad} \bar{U})^T + (\mathbf{Grad} \bar{U})^T \bar{\otimes} \mathbf{Grad} \bar{U}]$$

Ses composantes dans une base seront calculées à partir de formulation indicielle.

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (F_{kI} F_{kJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \right)$$

14.

Reprenons l'exemple de la déformation homogène triaxiale pour laquelle nous avons déjà identifié le tenseur gradient.

Avec la formule $\mathbf{C} = {}^t \mathbf{F} \bar{\otimes} \mathbf{F}$, on peut facilement calculer les composantes du tenseur de Cauchy Green droit qui est alors un tenseur diagonal.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Puis la formule $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ nous permet d'avoir les composantes du tenseur de Green Lagrange.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

15.

Avec les outils précédents, nous pouvons maintenant nous permettre de définir des grandeurs physiques mesurables.

Commençons par positionner dans la configuration de référence au point d'étude un vecteur infiniment petit \vec{dX} auquel on associe sa longueur dX .

On définit son vecteur image par le champ de déplacement. $\|\vec{n}\| = 1$. On peut remarquer que la direction de ce dernier n'est pas nécessairement identique à la direction du vecteur initial. $\vec{n} \neq \vec{N}$

La dilatation linéaire, ou l'allongement, est défini comme étant la variation relative de longueur du vecteur initial. Elle est dépendante du point d'étude et de la direction dans laquelle on fait la mesure.

$$\varepsilon(\vec{N}) = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

On peut la calculer soit à partir du tenseur de Cauchy Green droit, soit à partir du tenseur de Green Lagrange.

$$\varepsilon(M_0; \vec{N}) = \frac{dx - dX}{dX} = \sqrt{\vec{N} \mathbf{C} \vec{N}} - 1 = \sqrt{\vec{N} (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \vec{N}} - 1$$

On peut aussi calculer la dilatation linéaire dans des directions particulières. On constate par exemple que les premières composantes des tenseurs de Cauchy Green droit et de Green Lagrange sont liées à la direction \vec{E}_1 .

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_1) = \sqrt{\vec{E}_1 \mathbf{C} \vec{E}_1} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1$$

16.

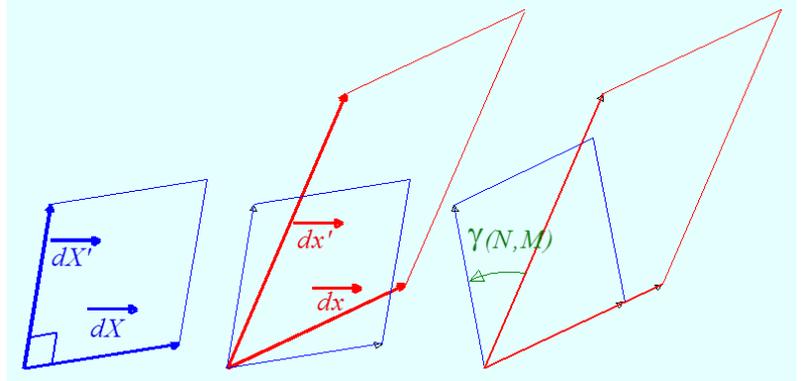
La détermination des dilatations linéaires n'est pas suffisante pour caractériser l'état de déformation d'un domaine. Il faut aussi être capable de calculer les variations d'angles.

Pour cela nous considérons deux directions définies dans la configuration de référence que nous allons suivre lors de la transformation.

Afin d'établir une norme initiale, nous imposons à nos deux directions d'avoir un angle droit dans la configuration de référence, puis nous regardons qu'elle est la variation de cet angle dans la configuration actuelle.

Cette variation détermine alors la distorsion angulaire ou le glissement. Cette distorsion angulaire est dépendante du point d'étude et des directions orthogonales initialement choisies.

$$\gamma(M_0; \vec{N}, \vec{M}) = \frac{\pi}{2} - (\vec{n}, \vec{m})$$



Le produit scalaire de deux vecteurs étant dépendant du cosinus de l'angle formé entre ces deux vecteurs, soit encore du sinus de l'angle complémentaire, on peut envisager de déterminer la distorsion angulaire par le calcul du produit scalaire des vecteurs dans la configuration actuelle.

$$\cos(\vec{dx}, \vec{dx}') = \frac{\vec{dx} \cdot \vec{dx}'}{dx \cdot dx'} = \sin \gamma$$

Le résultat peut être relié soit au tenseur de Cauchy Green droit, soit au tenseur de Green Lagrange.

$$\gamma(M_0; \vec{N}, \vec{M}) = \text{Arc sin} \left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{C} \cdot \vec{M}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{C} \cdot \vec{N}} \sqrt{\vec{M} \cdot \vec{C} \cdot \vec{M}}} \right) = \text{Arc sin} \left(\frac{2\vec{N} \cdot \vec{E} \cdot \vec{M}}{(1 + \varepsilon(\vec{N})) (1 + \varepsilon(\vec{M}))} \right)$$

Et l'on peut constater en prenant des vecteurs de notre base que l'on a un lien direct avec les composantes des tenseurs.

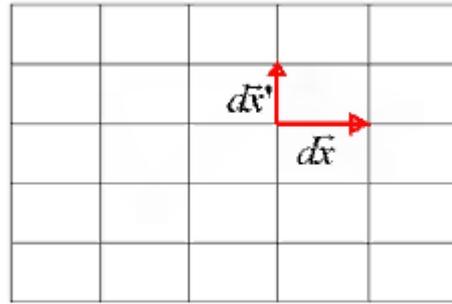
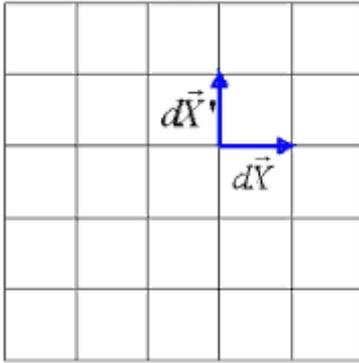
$$\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = \text{Arc sin} \left(\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{22}}} \right) = \text{Arc sin} \left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}} \right)$$

17.

Pour illustrer le calcul des composantes du tenseur de Green Lagrange, nous allons reprendre l'exemple de la déformation homogène triaxiale.

18.

Elle consiste donc à étirer ou raccourcir un parallépipède rectangle dans les trois directions formées par les arêtes. Etudions un plan particulier. Dans la configuration de référence, nous positionnons en un point courant un vecteur horizontal et un autre vecteur vertical. Puis nous imposons la déformation à notre domaine. Les extrémités de nos vecteurs sont attachées à des points et suivent les vecteurs déplacements de ces points. Dans la configuration actuelle, nous retrouvons donc nos vecteurs avec des variations par rapport à la configuration de référence. En étudiant ces variations, on peut mesurer d'une part la variation relative de longueur, d'autre part la variation de l'angle formé initialement par nos vecteurs, variation qui en l'occurrence est nulle. Avec ces informations, on peut en déduire certaines composantes de notre tenseur de Green Lagrange.



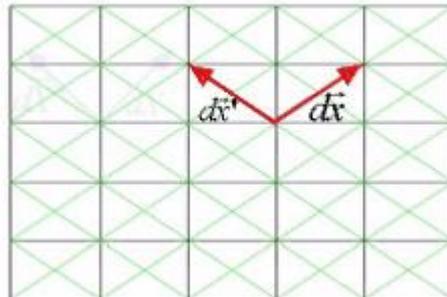
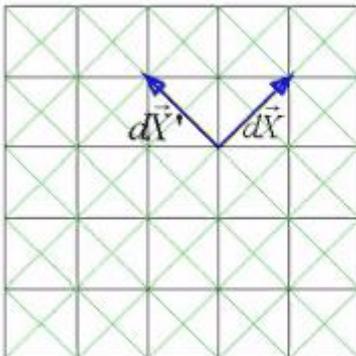
$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = 1,25 d\vec{X} \cdot d\vec{Y} \quad d\vec{x}' \cdot d\vec{x}' = 0,83 d\vec{X}' \cdot d\vec{Y}'$$

$$d\vec{x}' \cdot d\vec{x} - d\vec{X}' \cdot d\vec{Y} = 0$$

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \begin{pmatrix} 0,28 & 0 \\ 0 & -0,15 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

19.

Reprenons l'exemple précédent, mais cette fois, au lieu de travailler dans des directions parallèles aux arêtes nous allons travailler selon des directions orientées à 45°. Nous imposerons la même déformation à notre domaine. Dans notre plan particulier, les axes d'étude seront donc définis par une rotation de 45° par rapport à nos axes précédents. En un point d'étude, nous indiquons deux vecteurs orthogonaux dans la configuration de référence, puis nous imposons notre déformation. On voit aisément que cette fois l'angle formé entre les deux vecteurs change, alors qu'ils subissent le même allongement. Les composantes du tenseur de Green Lagrange ne sont plus les mêmes bien que l'on traduise le même état de déformation. Dans la base avec des vecteurs parallèles aux arêtes, la matrice représentant le tenseur était diagonale. On dit alors que nous sommes dans les directions principales de déformation.



$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = 1,06 d\vec{X} \cdot d\vec{X} \quad d\vec{x}' \cdot d\vec{x}' = 1,06 d\vec{X}' \cdot d\vec{X}'$$

$$d\vec{x}' \cdot d\vec{x} - d\vec{X}' \cdot d\vec{X} \neq 0$$

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,22 \\ 0,22 & 0,06 \end{pmatrix} (\vec{e}_i)$$

20.

Les tenseurs que nous avons déterminés sont symétriques avec des composantes réelles. Les représentants matriciels sont diagonalisables. C'est-à-dire qu'il est possible d'associer une base particulière dans laquelle le représentant matriciel sera purement diagonal.

Un parallélépipède rectangle élémentaire construit dans la configuration de référence selon cette base sera à nouveau un parallélépipède rectangle dans la configuration actuelle car les distorsions angulaires sont nulles. On peut alors envisager de calculer la variation relative de volume. Cette dernière peut être obtenue facilement à partir des composantes du tenseur de Cauchy Green droit. On fait alors apparaître le jacobien de notre tenseur.

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_I & 0 & 0 \\ 0 & C_{II} & 0 \\ 0 & 0 & C_{III} \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

$$\theta = \frac{dv - dV}{dV}$$

$$dv = \sqrt{C_I} dX_I \sqrt{C_{II}} dX_{II} \sqrt{C_{III}} dX_{III} = \sqrt{C_I C_{II} C_{III}} dV$$

$$dv = \sqrt{\det(\mathbb{C})} dV \quad J = \frac{dv}{dV} \quad \theta = J - 1$$

21.

Cette leçon nous aura permis de prendre conscience des différences existantes entre la notion de déplacement et de déformation. Nous avons vu aussi que nous ne pouvons nous contenter d'une représentation pour l'état de déformation et qu'il convient d'utiliser la notion de tenseur. Par la suite nous allons formuler des hypothèses complémentaires afin de simplifier nos études.

2-2

DEFORMATIONS

Petites déformations

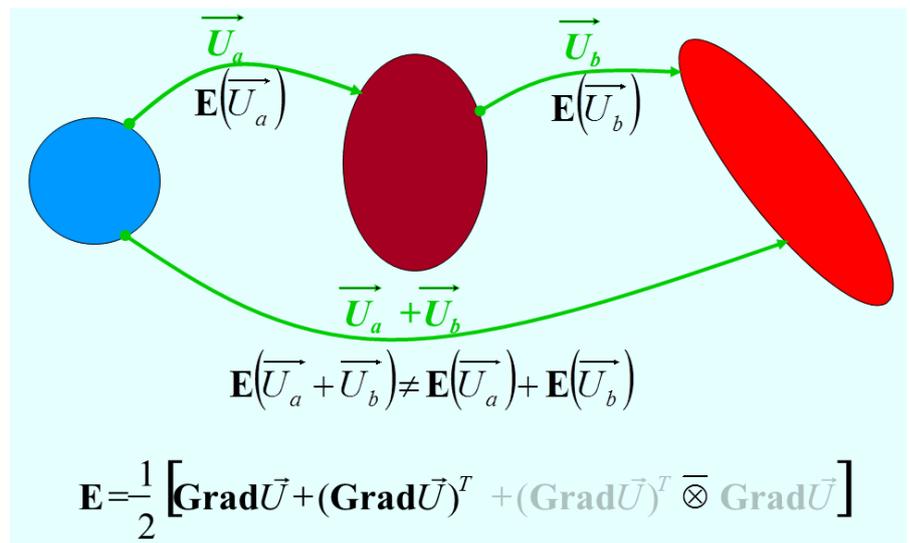
22.

Avec la leçon précédente, nous avons donné des pistes pour obtenir des valeurs de déformations ou de distorsions angulaires dans une configuration générale. Toutefois, on réalise assez facilement la complexité des formules obtenues ce qui va engendrer des difficultés de mise en œuvre. Afin de remédier à cela, nous allons maintenant faire l'hypothèse de transformation infinitésimale.

23.

La formulation des déformations au sein de la matière peut donc prendre une forme relativement compliquée. Avec les expressions données précédemment, on se rend compte que l'état de déformation n'est pas linéaire.

En d'autres termes, la déformation totale obtenue à la suite d'une succession de champs de déplacement n'est pas la simple addition des déformations élémentaires occasionnées par chaque champ de déplacement pris séparément. Mathématiquement, cette non linéarité provient du produit des deux tenseurs dans le calcul du tenseur de Green Lagrange. Mais dans de nombreuses applications, ce terme n'est pas prépondérant par rapport aux deux précédents et nous pourrions le négliger. On aura ainsi linéarisé notre transformation.



24.

Pour obtenir cette linéarisation, nous allons formuler l'hypothèse des transformations infinitésimales, dite encore l'hypothèse des petites perturbations. Cela se traduit essentiellement par deux propositions :

- Le tenseur gradient de déplacement ne contient que des termes très petits devant l'unité. $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \ll 1$
- Le déplacement de chacun des points du domaine matériel est petit. Cette dernière assertion est importante, car elle implique que l'on pourra confondre l'état actuel avec l'état initial de référence. Nous n'avons plus lieu de distinguer dans nos notations ces deux états et les indices majuscules et minuscules deviennent équivalents. $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

Afin de bien marquer ces différences avec l'étude en grandes déformations, nous appellerons ε ce tenseur qui caractérisera nos déformations. $\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T] = \mathbf{E}$

Dans une base cartésienne, le calcul des composantes de ce tenseur est très simple.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij}$$

25.

Avec la relation précédente, on constate facilement que le tenseur déformation est en fait la partie symétrique du tenseur gradient du champ de déplacement. Il est défini par six composantes. On peut aussi définir la partie anti-symétrique qui donnera un tenseur déterminé en fait par seulement trois composantes, les termes situés sur la diagonale de la représentation matricielle étant nécessairement nuls.

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T] \quad \mathbf{Grad} \vec{U} = \overline{\varepsilon} + \overline{\omega}$$

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \vec{U} - (\mathbf{Grad} \vec{U})^T] \quad (\mathbf{Grad} \vec{U})^T = \overline{\varepsilon} - \overline{\omega}$$

On montre que l'on peut associer un vecteur à un tel tenseur de tel sorte que le produit tensoriel soit remplacé par un produit vectoriel.

$$\nabla \vec{A} ; \quad \overline{\omega} \vec{A} = \overline{\omega} \wedge \vec{A}$$

L'opérateur gradient, qui en fait est un simple opérateur de dérivation spatiale, est linéaire.

$$\mathbf{Grad} [\lambda \vec{U}_a + \mu \vec{U}_b] = \lambda \mathbf{Grad} \vec{U}_a + \mu \mathbf{Grad} \vec{U}_b$$

Il en découle que le tenseur déformation est lui aussi linéaire.

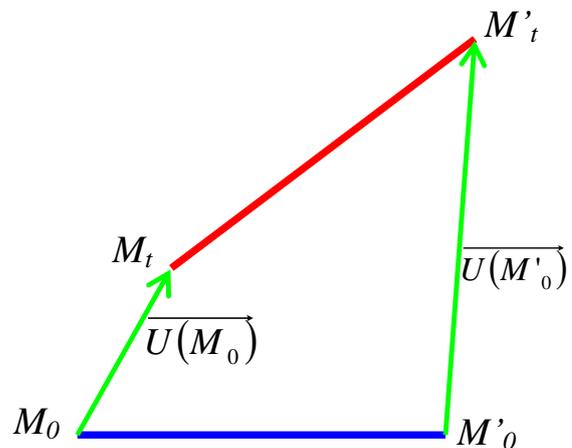
$$\overline{\varepsilon} [\lambda \vec{U}_a + \mu \vec{U}_b] = \lambda \overline{\varepsilon} [\vec{U}_a] + \mu \overline{\varepsilon} [\vec{U}_b]$$

26.

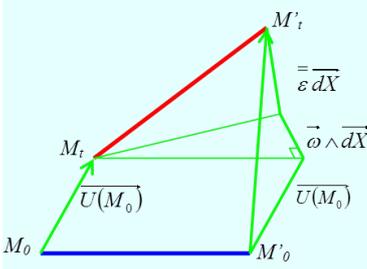
On peut remarquer que le vecteur image d'un vecteur pris dans la configuration de référence est dépendant du tenseur gradient du champ de déplacement, donc de ses parties symétriques et anti-symétriques.

A partir du lien existant entre ces deux vecteurs et en utilisant la relation de Chasles, on en déduit une relation entre les vecteurs déplacements de deux points voisins pris dans la configuration de référence, deux points entre lesquels nous aurons tendu un élastique.

Ces deux déplacements sont reliés entre eux par l'intermédiaire des tenseurs symétriques et anti-symétriques. En décomposant le déplacement du deuxième point, on peut voir qu'il y a tout d'abord le déplacement du premier point. Puis un vecteur lié au tenseur anti-symétrique, vecteur qui, compte tenu du fait que nous sommes dans l'hypothèse des petites perturbations, peut être obtenu par simple rotation.



Enfin une troisième composante est liée au tenseur symétrique. Grâce à cette décomposition, on voit que notre élastique initialement tendu entre les points M_0 et M'_0 ne s'est effectivement déformé que dans la dernière partie. Il est donc tout à fait logique de dire que le tenseur symétrique ε est le tenseur déformation. Si ce dernier est nul, localement le champ de déplacement se résume à une translation combinée à une rotation, ce qui n'engendre aucune déformation.



$$d\vec{x} - d\vec{X} = \mathbf{F} d\vec{X} - d\vec{X} = \mathbf{grad}\vec{U} d\vec{X}$$

$$d\vec{x} - d\vec{X} = \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{X} + \overline{\overline{\omega}} d\vec{X}$$

$$d\vec{X} = \overline{\overline{M_0 M'_0}} \quad d\vec{x} = \overline{\overline{M'_i M'_i}}$$

$$\overline{\overline{U(M_0)}} = \overline{\overline{M_0 M'_i}} \quad \overline{\overline{U(M'_0)}} = \overline{\overline{M'_0 M'_i}}$$

$$\overline{\overline{M'_i M'_i}} - \overline{\overline{M_0 M'_0}} = \overline{\overline{M'_0 M'_i}} - \overline{\overline{M_0 M'_i}}$$

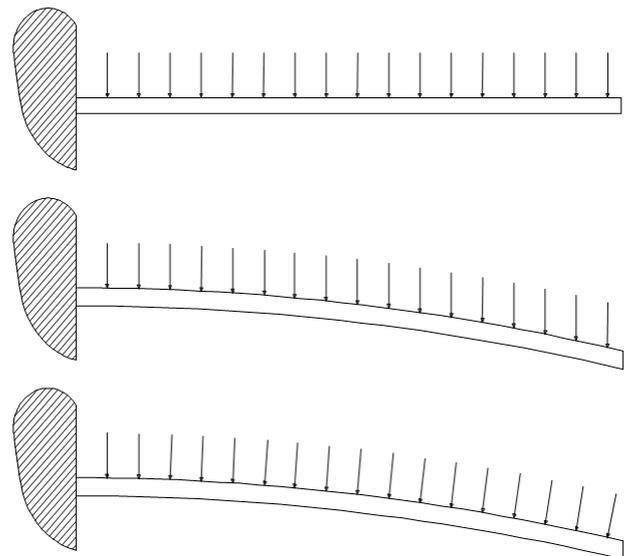
$$\overline{\overline{U(M'_0)}} = \overline{\overline{U(M_0)}} + \overline{\overline{\omega}} d\vec{X} + \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{X}$$

$$\overline{\overline{U(M'_0)}} = \overline{\overline{U(M_0)}} + \overline{\overline{\omega}} \wedge d\vec{X} + \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{X}$$

27.

L'hypothèse des petites perturbations est réalisée pour de nombreuses applications mais ils en existent qui ne peuvent s'en satisfaire. Pourtant c'est une réelle simplification au niveau des calculs.

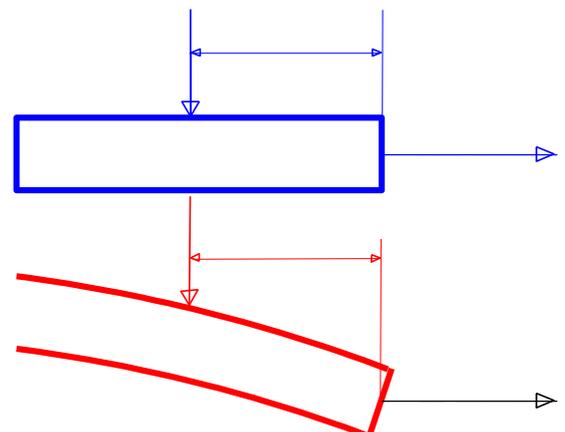
Pour nous en convaincre regardons le simple cas d'une poutre encastée à une extrémité et supportant une charge uniformément répartie sur toute sa longueur. En théorie des poutres, on travaille sur la structure en la considérant dans sa configuration de référence, c'est-à-dire comme si elle n'était pas déformée. Mais en toute rigueur, si les déformations sont un peu grandes, donc si l'hypothèse des petites perturbations n'est plus applicable, il faut faire les calculs sur la structure dans la configuration actuelle, donc en prenant en compte la déformée. Se pose alors la question de la définition précise du chargement. Avons-nous un chargement qui, tel les actions gravitationnelles, garde une direction constante quelque soit la déformée de notre structure ? Ou bien avons-nous un chargement qui, tel les actions de pression sur une surface, a une direction liée à la déformée de notre structure ?



28.

De la réponse à cette question va dépendre l'expression de notre moment de flexion. En effet dans le premier cas, la distance séparant le chargement au point de calcul du moment de flexion est comptée simplement en projection horizontale.

Alors que dans le deuxième cas, cette distance, qui doit être prise perpendiculairement à la ligne d'action du chargement, est fonction de notre déformée. Et ensuite, suivant la valeur de notre moment de flexion, la déformée de notre structure suivra. On réalise alors bien sur cet exemple qu'en dehors de l'hypothèse de petites perturbations, les calculs vont prendre une certaine complexité.



Et ceci prend encore une autre signification lorsque l'on rentre dans les calculs. La formule classique qui permet d'obtenir l'équation de la déformée d'une poutre en flexion fait apparaître une équation différentielle du second ordre. En regardant de près la démonstration de cette relation, on peut constater que l'on a considéré que la pente de la poutre était négligeable.

$$M_{fz} = EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Si ce n'est pas le cas, l'équation réelle est beaucoup plus complexe. Certes, cela donne toujours une équation différentielle du second ordre, mais la recherche de solution mathématique est loin d'être évidente.

$$M_{fz} = \frac{EI_{Gz}}{R} = EI_{Gz} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

29.

Avec l'hypothèse des petites perturbations, les termes contenus à l'intérieur du tenseur déformation sont négligeables devant l'unité. $\varepsilon_{ij} \ll 1$

Compte tenu de cette approximation, le calcul de la dilation linéaire dans une direction associée à un vecteur de notre base prend alors une expression très simple.

$$\varepsilon(M; \vec{E}_1) = \sqrt{\vec{E}_1 \mathbf{C} \vec{E}_1} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 \approx \varepsilon_{11}$$

De même pour la distorsion angulaire d'un angle droit formé entre deux vecteurs de notre base. Les deux résultats précédents montrent que les composantes de notre tenseur déformation peuvent avoir des significations physiques importantes.

$$\gamma(M; \vec{E}_1, \vec{E}_2) = \text{Arc sin} \left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}} \right) \approx 2\varepsilon_{12}$$

Ainsi, dans une base donnée, les termes situés sur la diagonale de notre tenseur vont être les dilations linéaires dans les directions des vecteurs de base. Pour les termes hors diagonale, on trouve les demi distorsions angulaires des angles droits formés par les vecteurs de notre base.

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{E}_1) & \frac{\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}{2} & \frac{\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_3)}{2} \\ \frac{\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}{2} & \varepsilon(\vec{E}_2) & \frac{\gamma(\vec{E}_2, \vec{E}_3)}{2} \\ \frac{\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_3)}{2} & \frac{\gamma(\vec{E}_2, \vec{E}_3)}{2} & \varepsilon(\vec{E}_3) \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

30.

Mais on peut aussi travailler avec de simples vecteurs unitaires et orthogonaux $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

La dilatation linéaire dans une direction unitaire est obtenue rapidement à partir de la connaissance du tenseur déformation.

$$\varepsilon(M; \vec{a}) = \vec{a} \cdot \mathbf{E} \vec{a} = \varepsilon_{aa}$$

De même, avec le tenseur déformation, il est très simple de calculer la distorsion angulaire pour deux vecteurs orthogonaux. Compte tenu de la symétrie de ce tenseur, on peut utiliser deux expressions différentes pour ce calcul.

$$\gamma(M; \vec{a}, \vec{b}) = 2 \vec{a} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{b} = 2 \varepsilon_{ab} = 2 \vec{b} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{a}$$

Si l'on considère un vecteur unitaire quelconque, l'image de ce dernier par le tenseur déformation nous permet de déterminer un nouveau vecteur que nous appellerons le vecteur déformation pure au point considéré dans la direction unitaire choisie.

$$D_p(M; \vec{a}) = \overline{\overline{\varepsilon}}(M) \vec{a}$$

Enfin l'expression de la variation relative de volume au point étudié nous conduit en fait à la trace du tenseur déformation, soit encore la divergence du vecteur déplacement.

$$\theta = \frac{dv - dV}{dV} = J - 1 \approx \text{tr} \overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = \text{div} \vec{U}$$

31.

Dans la base d'étude, le tenseur des déformations est représenté par une matrice symétrique à coefficients réels. Comme nous l'avons vu précédemment, il est possible de trouver une base dans laquelle, le tenseur prend une forme purement diagonale. Cette base peut être définie par le processus de diagonalisation, c'est-à-dire de recherche de vecteurs propres et de valeurs propres associés à notre état de déformation.

Un vecteur propre est un vecteur colinéaire à son image par notre application tensorielle, le coefficient de colinéarité étant la valeur propre.

$$\overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{N}_I = \varepsilon_I \vec{N}_I$$

Avec l'équation précédente, on peut déduire une relation importante permettant d'obtenir les valeurs propres.

$$\overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{N}_I - \varepsilon_I \vec{N}_I = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \det(\overline{\overline{\varepsilon}} - \varepsilon_I \vec{I}) = 0$$

D'autre part, du fait de la symétrie de notre tenseur déformation, on constate que l'on peut écrire la relation dite de Cauchy :

$$\vec{N}_I \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{N}_{II} = \vec{N}_{II} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{N}_I \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_I \cdot \varepsilon_{II} \vec{N}_{II} = \vec{N}_{II} \cdot \varepsilon_I \vec{N}_I$$

Ce qui nous montre que si deux valeurs propres sont distinctes, alors les vecteurs propres associés sont orthogonaux.

$$(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \vec{N}_I \cdot \vec{N}_{II} = 0$$

Les trois vecteurs propres peuvent donc constituer une base orthonormée directe dans laquelle le représentant matriciel de notre état de déformation est purement diagonal. On appelle directions principales, les directions données par les vecteurs propres. Les valeurs propres seront appelées déformations principales.

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{N}_I \\ \vec{N}_{II} \\ \vec{N}_{III} \end{pmatrix}$$

32.

Pour un tenseur quelconque, la recherche des valeurs propres passe par l'annulation du polynôme caractéristique. Ce polynôme peut être défini à partir de n'importe quel représentant matriciel du tenseur, c'est-à-dire dans n'importe quelle base. Toutefois les racines de ce polynôme, c'est-à-dire les valeurs propres doivent toujours être les mêmes. En conséquence, le polynôme est indépendant de la base.

$$P_T(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + T_I \lambda^2 - T_{II} \lambda + T_{III}$$

Ce qui revient à dire que les coefficients du polynôme sont des invariants par changement de base. Le premier invariant représente tout simplement la trace de notre matrice. Le dernier est le déterminant. Le deuxième est la demi-différence du carré de la trace de la matrice avec la trace de la matrice multipliée par elle-même.

$$\begin{cases} T_I = \text{tr} \mathbf{T} \\ T_{II} = \frac{1}{2} \left((\text{tr} \mathbf{T})^2 - \text{tr} \mathbf{T}^2 \right) \\ T_{III} = \det \mathbf{T} \end{cases}$$

En faisant le calcul dans la base principale, on obtient des résultats assez simples.

$$\begin{cases} T_I = \lambda_I + \lambda_{II} + \lambda_{III} \\ T_{II} = \lambda_I \lambda_{II} + \lambda_{II} \lambda_{III} + \lambda_{III} \lambda_I \\ T_{III} = \lambda_I \lambda_{II} \lambda_{III} \end{cases}$$

33.

Avec cette leçon, nous avons vu comment obtenir des relations simplifiées dans le cas d'une transformation infinitésimale. Ces expressions seront très utiles dans la suite car elles permettent d'appliquer sans problème le principe de superposition.

2-3

DEFORMATIONS

Représentations graphiques - Compatibilité

1.

Pour en terminer avec notre étude sur l'état de déformation en un point, il nous reste à en voir la décomposition en partie sphérique et déviatorique ainsi que les modes de représentations graphiques. Nous concluons cette leçon par l'établissement des équations de compatibilité entre un état de déformation et un champ de déplacement.

2.

Pour un tenseur du second ordre quelconque, il est toujours possible de le décomposer sous forme d'une somme de deux tenseurs de tel sorte que l'un soit sphérique et que l'autre ait une trace nulle. La décomposition est unique.

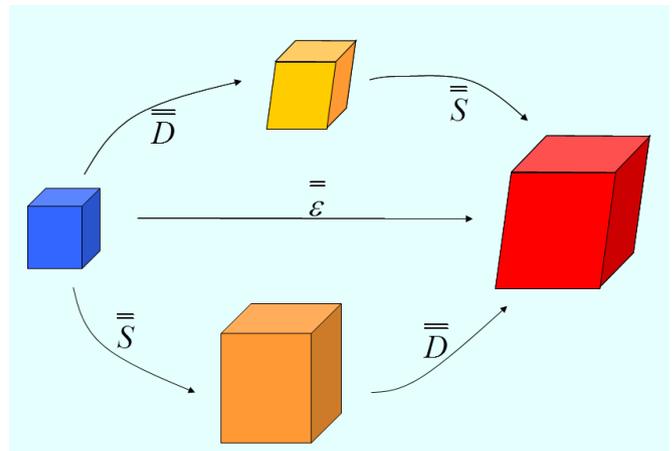
$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I} / 3 = T_{ii} \mathbf{I} / 3$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} - \mathbf{S}$$

Dans le cas des déformations, comme la trace du tenseur représente la variation relative de volume, avec le tenseur sphérique, on change le volume sans changer la forme alors qu'avec le tenseur déviatorique, on change la forme sans changer le volume.

Prenons l'exemple d'une déformation imposée à un domaine. Comme nous sommes en petites perturbations et que l'on peut linéariser les déformations, on peut très bien considérer que l'on a tout d'abord un état déviatorique complété par un état sphérique. Mais on peut aussi admettre que l'on impose un état sphérique suivi d'un état déviatorique.



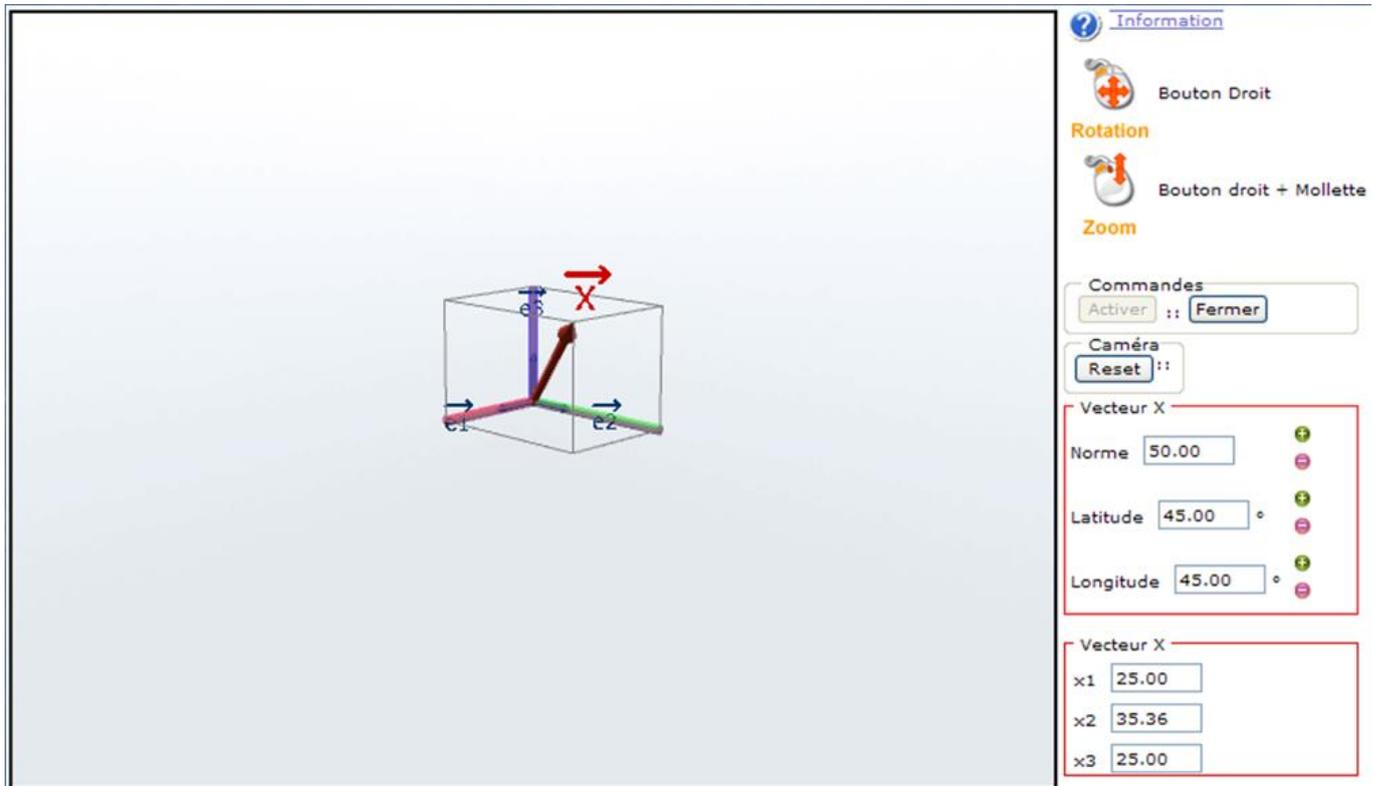
3.

Afin de conforter nos connaissances sur la décomposition en état sphérique et état déviatorique, nous allons utiliser un module interactif du projet d'enseignement MECAGORA. Ce module utilise le logiciel VIRTOOLS. Si ce dernier n'est pas déjà opérationnel sur l'ordinateur, une installation automatique sera proposée lors de la première tentative d'utilisation.

Le mode d'emploi de la souris est disponible à tout instant en cliquant sur le menu Information. Un écran classique se compose de différentes fenêtres.

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Campus de CLUNY

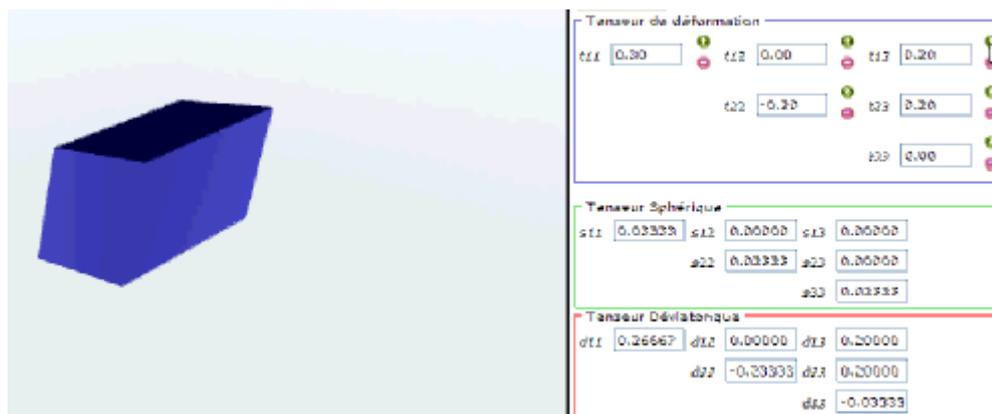
Une fenêtre de visualisation graphique contient des objets en 3 D que l'on peut déplacer de façon interactive avec la souris. Une fenêtre de commande dans laquelle il est possible d'agir sur des valeurs de paramètres. Et une fenêtre de résultats contenant les valeurs numériques de certaines grandeurs calculées.



4.

Dans le module IB4, après activation, on obtient dans la fenêtre graphique un cube que l'on peut déformer en imposant de nouvelles valeurs dans la fenêtre de commande.

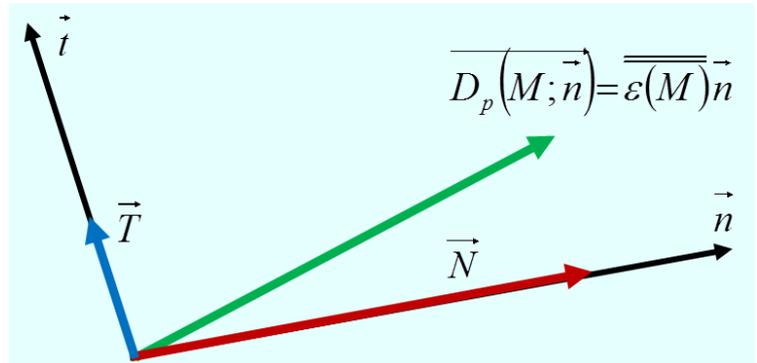
En imposant une dilatation linéaire dans différentes directions, on constate dans la fenêtre de résultats que le tenseur sphérique change et que le tenseur déviatorique est diagonal.



Par contre, il ne l'est plus lorsque l'on impose des distorsions angulaires à notre cube initial.

5.

La représentation graphique dans le plan de Mohr est tout à fait intéressante. Pour mémoire, ce plan est le plan vectoriel contenant l'axe normal selon lequel on souhaite faire l'étude en un point et le vecteur image associé. Dans le cas de l'application tensorielle déformation ce vecteur est le vecteur déformation pure.



La projection du vecteur déformation pure sur l'axe normal nous donne directement la mesure de la dilatation linéaire au point d'étude, dans la direction de l'axe normal étudié.

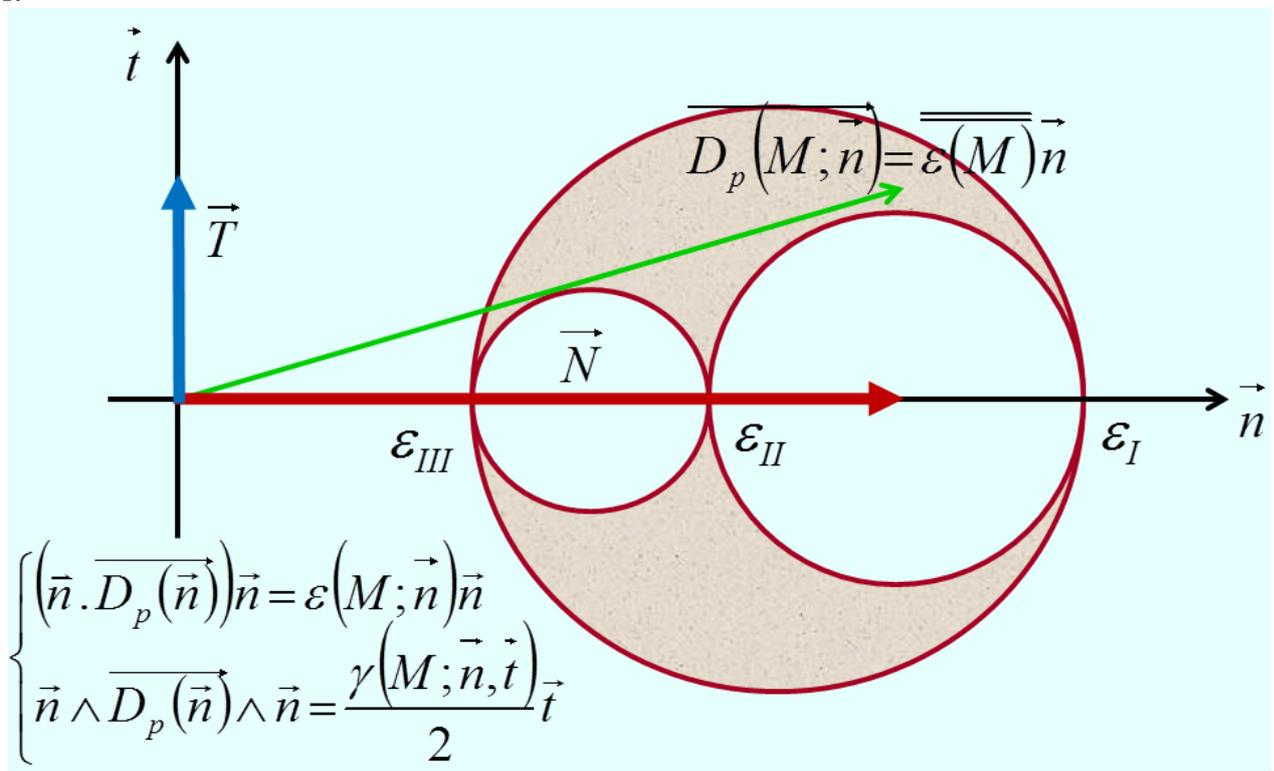
$$\vec{N} = (\vec{n} \cdot \overline{D_p(\vec{n})}) \vec{n} = \varepsilon(M; \vec{n}) \vec{n}$$

La projection sur l'axe tangent nous permet d'avoir la demi-valeur de la distorsion angulaire au point d'étude, pour l'angle droit initialement formé entre l'axe normal et le vecteur orthogonal appartenant au plan de Mohr.

$$\vec{T} = \vec{n} \wedge \overline{D_p(\vec{n})} \wedge \vec{n} = \frac{\gamma(M; \vec{n}, \vec{t})}{2} \vec{t}$$

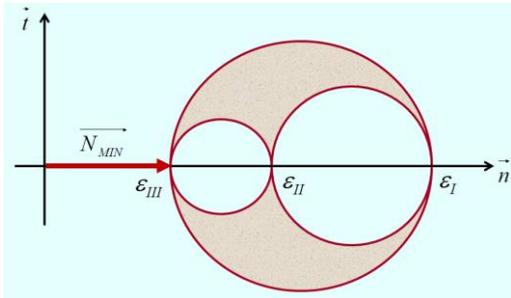
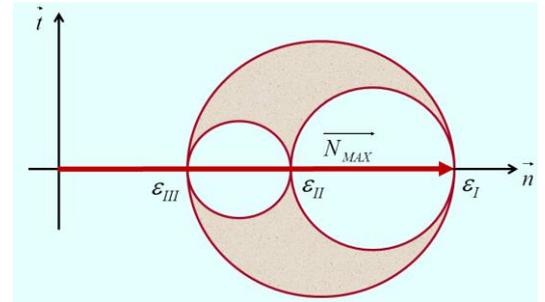
6.

Dans la représentation du tri-cercle de Mohr, on sait que le vecteur image doit avoir son extrémité à l'intérieur de la zone délimitée par ces trois cercles. Donc les projections sur les vecteurs de base sont aussi limitées.



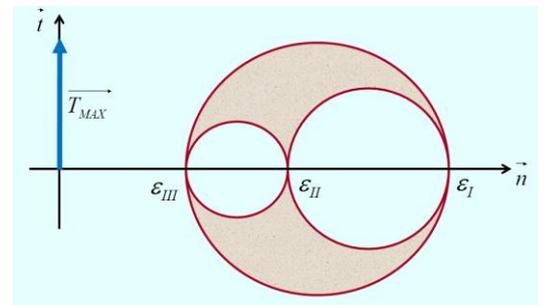
7.

La plus grande déformation principale représente la dilatation linéaire la plus élevée au point d'étude.



La plus petite déformation principale représente la dilatation linéaire la plus faible au point d'étude.

Enfin, la plus grande distorsion angulaire est donnée par le diamètre du plus grand des trois cercles, c'est-à-dire la différence entre la plus grande déformation principale et la plus petite.



8.

Les tenseurs déformations, c'est-à-dire des tenseurs du second ordre, sont calculables par dérivation du champ de déplacement, c'est-à-dire un tenseur du premier ordre.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T]$$

Les formules indicelle en coordonnées cartésiennes pour le calcul des six composantes du tenseur déformation montrent qu'elles se déduisent simplement des trois composantes du vecteur déplacement.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Il est parfois utile d'envisager le cheminement inverse, c'est-à-dire déterminer le champ de déplacement associé à un état de déformation. Cette transformation n'est pas immédiate car elle implique un processus d'intégration de six fonctions scalaires pour remonter à trois fonctions scalaires constituant les composantes d'un vecteur.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(M) \Rightarrow ? \Rightarrow \vec{U}(M)$$

Pour que cela puisse être réalisable, il faut que les composantes du tenseur déformation soient liées entre elles. Ces liens s'appellent les conditions de compatibilités.

9.

Ces conditions, qui ne traduisent que des conditions d'intégrabilité de différentielles totales exactes, sont obtenues en partant du tenseur anti symétrique.

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \vec{U} - (\mathbf{Grad} \vec{U})^T] \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En faisant la démonstration dans un système de coordonnées cartésiennes, on constate que les dérivées spatiales des composantes de ce tenseur anti symétrique sont liées aux dérivées spatiales des composantes du tenseur des déformations.

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i}$$

10.

En fait ces dérivées spatiales peuvent être interprétées comme les composantes du vecteur gradient de cette composante du tenseur anti symétrique.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\omega_{ij}) = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} \overrightarrow{E}_k$$

Mais ceci ne sera effectivement un vecteur gradient que si le rotationnel associé est nul ce qui nous donne les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0 = \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$$

Ce qui constitue en fait les conditions d'intégrabilité de Cauchy d'une différentielle totale exacte.

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_m} dx_m$$

En fonction des composantes du tenseur déformation, et compte tenu de sa symétrie, on obtient en fait un système de six équations indépendantes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0$$

11.

Ces équations peuvent se présenter sous forme développées dans un système de coordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Mais la forme générale valable dans n'importe quel système de coordonnées est une formulation tensorielle.

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div}(\overline{\underline{\varepsilon}}) + \left(\overrightarrow{\text{grad}} \text{div}(\overline{\underline{\varepsilon}}) \right)^T - \overrightarrow{\text{grad}} \left(\overline{\text{grad}} \left[\text{tr}(\overline{\underline{\varepsilon}}) \right] \right) - \Delta \overline{\underline{\varepsilon}} = 0$$

12.

Si les conditions de compatibilités sont satisfaites, il est alors possible de déterminer les champs de déplacement générateurs de l'état de déformation.

Pour cela, il faut commencer par intégrer les différentielles donnant les trois composantes du tenseur anti symétrique.

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

Ensuite, on peut remonter aux trois composantes du vecteur déplacement par intégration des formes différentielles reliant le vecteur déplacement aux tenseurs déformation et anti symétrique.

$$du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

L'auditeur curieux pourra appliquer la méthode pour trouver les champs de déplacement générateur du tenseur déformation proposé.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \nu b x_1 & a x_1 x_2 & 0 \\ a x_1 x_2 & \nu b x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -b x_1 \end{pmatrix} (\vec{e}_i)$$

13.

La représentation graphique de Mohr permet de bien comprendre l'intérêt que nous avons à définir les déformations principales qui représentent en un point les valeurs extrémales des dilatations linéaires et des distorsions angulaires. Enfin nous avons vu qu'il n'est pas suffisant de se donner une matrice symétrique pour avoir un état de déformation. Il est indispensable que les relations de compatibilité soient vérifiées.

2-4 DEFORMATIONS

Application

Enoncé

On considère le champ de déplacement donné par les relations suivantes :

$$\vec{u}(X, t) = \vec{x} - \vec{X} = k X_2 \vec{E}_1$$

1- Déterminer alors les composantes, dans la base orthonormée directe $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, des tenseurs suivants :

F	$d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}$	Tenseur gradient
C	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = d\vec{X} \mathbf{C} d\vec{X}'$	Tenseur de Cauchy Green Droit
E	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \mathbf{E} d\vec{X}'$	Tenseur des déformations de Green Lagrange

2- On se place au point M_0 de coordonnées $(1, 1, 0)$. Soient \vec{a} le vecteur représentant la bissectrice du plan (\vec{E}_1, \vec{E}_2) et \vec{b} le vecteur représentant la trisectrice du trièdre :

$$\vec{a} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad \vec{b} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Calculer la dilatation linéaire en M_0 dans les directions \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{a} et \vec{b} .

Calculer les distorsions angulaires suivantes :

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2) \quad \gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{a})$$

3- On a $k = 10^{-3}$.

En admettant la linéarisation, définir les composantes du tenseur de déformation et du tenseur antisymétrique :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\overline{\text{grad} \vec{U}} + \left(\overline{\text{grad} \vec{U}} \right)^T \right] \qquad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left[\overline{\text{grad} \vec{U}} - \left(\overline{\text{grad} \vec{U}} \right)^T \right]$$

4- Tracer le tricercler de Mohr des déformations au point M . Représenter sur ce tricercler les vecteurs déformations pures dans les directions \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{a} et \vec{b} :

$$\overline{D_p(M; \vec{E}_1)} \quad \overline{D_p(M; \vec{E}_2)} \quad \overline{D_p(M; \vec{a})} \quad \overline{D_p(M; \vec{b})}$$

1.

Nous allons regarder une application sur l'état de déformation à partir d'un exercice.

2.

Voici l'énoncé de l'exercice. Les auditeurs sont invités à apporter des réponses de façon autonome puis à valider la solution en regardant les réponses. A partir de la donnée d'un champ de déplacement, nous allons définir les tenseurs rencontrés dans le cours. Ensuite nous verrons comment obtenir soit par des solutions graphiques, soit par des calculs, des dilatations linéaires et des distorsions angulaires. En passant en transformation infinitésimale on définira le tenseur des déformations auquel on va associer un tricerclé de Mohr. On terminera en représentant sur ce tricerclé différents vecteurs déformations pures.

3.

Nous avons plusieurs formules permettant de calculer le tenseur gradient et l'on peut utiliser celle qui donne le lien avec le tenseur gradient du champ de déplacement

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \text{Grad} \vec{U}$$

Concrètement, cela revient à dire que le tenseur gradient est obtenu en faisant la somme du tenseur identité avec le tenseur traduisant les variations du champ de déplacement dans l'espace. Pour faire cette somme il est indispensable que les deux représentants tensoriels soient exprimés dans la même base.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Comme le champ de déplacement est très simple, le tenseur gradient du champ de déplacement présente de nombreux termes nuls. Il est à noter que nous avons affaire à un état homogène, c'est-à-dire indépendant de la position du point. Le tenseur gradient obtenu est le même en tout point de l'espace ce qui sera aussi le cas pour les autres résultats.

$$\vec{u}(X_j, t) = \vec{x} - \vec{X} = k X_2 \vec{E}_1 \Rightarrow U_1 = k X_2, U_2 = 0, U_3 = 0 \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

4.

Pour le calcul du tenseur de Cauchy Green Droit, nous avons une relation directe à partir du tenseur gradient.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}$$

Le calcul des composantes nous ramène à un simple produit de matrices.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

De même, nous avons une formule simple pour le calcul du tenseur de Green Lagrange.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Ce qui nous permet d'obtenir ses composantes dans notre base d'étude.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

5.

Nous allons faire une petite figure afin de bien comprendre la transformation. Pour cela nous commençons par positionner le point M_0 dans un repère plan avec le point O comme origine et les vecteurs (\vec{E}_1, \vec{E}_2) comme base. Comme la deuxième coordonnée du point M_0 vaut 1, le déplacement de ce point est horizontal et sa valeur vaut k ce qui nous permet de représenter le point M image dans la configuration actuelle.

$$\vec{M_0M} = \vec{U}(M_0) = k X_2 \vec{E}_1 = k \vec{E}_1$$

Pour imager la dilatation linéaire dans la direction \vec{E}_1 nous allons utiliser des clous et un élastique. On plante un premier clou au point d'étude M_0 . Ensuite il nous faut mettre, dans la configuration initiale, un élastique de longueur très faible dans la direction \vec{E}_1 . Pour cela, on sélectionne un point P_0 de tel sorte qu'il soit infiniment proche de M_0 et dans la direction \vec{E}_1 . On plante un clou en P_0 et on tire un élastique de longueur dX entre les deux points. Ensuite on regarde comment se placent ces deux clous dans la configuration actuelle pour avoir la nouvelle longueur de l'élastique et en déduire son allongement.

$$\vec{M_0P_0} = dX = dX \vec{E}_1$$

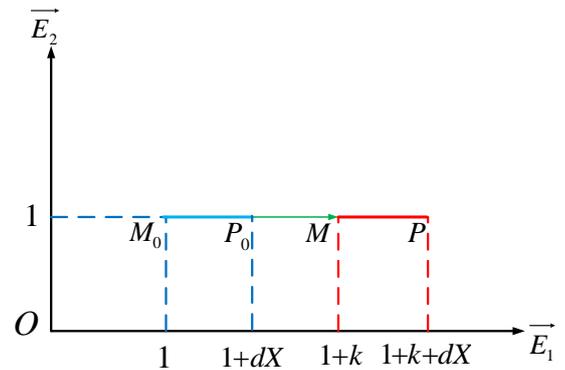
Mais en fait comme le déplacement du point P_0 est le même que celui du point M_0 car ils ont la même deuxième coordonnée de positionnement, le passage de la configuration de référence à la configuration actuelle pour notre élastique est une simple translation sans variation de longueur.

$$\vec{P_0P} = \vec{U}(P_0) = k X_2 \vec{E}_1 = k \vec{E}_1 = \vec{U}(M_0)$$

$$\vec{MP} = dx = dx \vec{E}_1 = dX \vec{E}_1$$

On constate donc facilement que l'allongement de l'élastique est nul ce qui revient à dire que la dilatation linéaire au point M_0 dans la direction \vec{E}_1 est nulle.

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_1) = \frac{dx - dX}{dX} = 0$$



6.

On peut reprendre la même technique pour obtenir la dilatation linéaire dans la direction \vec{E}_2 . Pour cela il faut définir dans la configuration de référence un point Q_0 infiniment voisin du point M_0 positionné dans la direction \vec{E}_2 . $\vec{M_0Q_0} = dX' = dX' \vec{E}_2$

Ensuite on impose le champ de déplacement pour obtenir le point image Q dans la configuration actuelle. Cette fois, comme la deuxième coordonnée du point Q_0 est différente de la deuxième coordonnée du point M_0 les deux déplacements sont différents.

$$\vec{Q_0Q} = \vec{U}(Q_0) = k X_2 \vec{E}_1 = k(1 + dX') \vec{E}_1 = \vec{U}(M_0) + k dX' \vec{E}_1$$

Cela nous permet d'obtenir la position de notre nouvel élastique dans la configuration actuelle, position déterminée par un vecteur.

$$\overrightarrow{MQ} = d\vec{x}'$$

La longueur de l'élastique dans la configuration actuelle, c'est-à-dire la norme du vecteur ainsi déterminé, nous permet de calculer la dilatation linéaire recherchée.

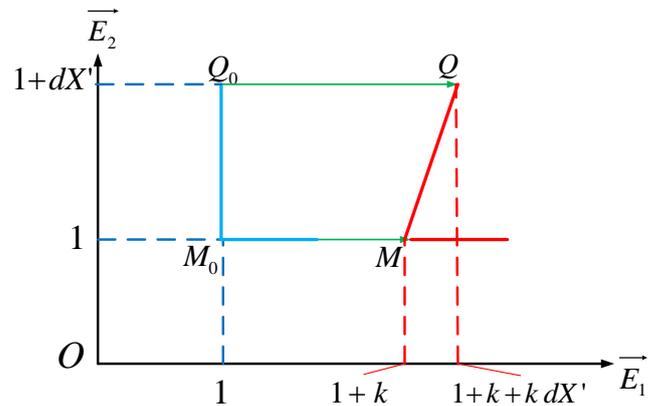
$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_2) = \frac{dx' - dX'}{dX'}$$

Pour obtenir cette norme, on peut se contenter du théorème de Pythagore.

$$dx'^2 = dX'^2 + k^2 dX'^2$$

Et on obtient la dilatation linéaire au point M_0 dans la direction \vec{E}_2 qui cette fois n'est pas nulle.

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_2) = \sqrt{1+k^2} - 1$$



7.

Essayons de réutiliser cette technique à base de clous et d'élastique pour obtenir la dilatation linéaire dans une direction selon la bissectrice du plan. Il faut donc définir dans la configuration de référence un point R_0 très proche de M_0 dans la direction de la bissectrice.

$$\overrightarrow{M_0 R_0} = dX'' = \frac{dX''}{\sqrt{2}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

Ensuite on lui associe son image dans la configuration actuelle par le champ de déplacement.

$$\overrightarrow{R_0 R} = \overline{U(R_0)} = k \left(1 + \frac{dX''}{\sqrt{2}} \right) \vec{E}_1$$

Ce qui nous permet d'obtenir le vecteur position de notre élastique dans la configuration actuelle.

$$\overrightarrow{MR} = d\vec{x}''$$

Pour calculer la norme de ce vecteur, c'est-à-dire la nouvelle longueur de l'élastique, on va utiliser la relation de Chasles.

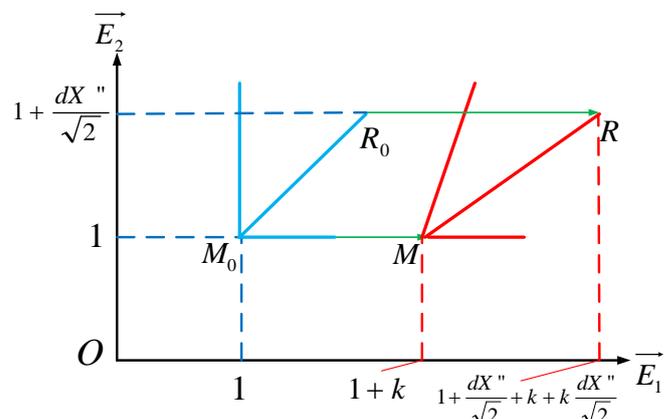
$$\overrightarrow{MR} = d\vec{x}'' = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0 R_0} + \overrightarrow{R_0 R}$$

$$\overrightarrow{MR} = -k \vec{E}_1 + \frac{dX''}{\sqrt{2}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) + k \left(1 + \frac{dX''}{\sqrt{2}} \right) \vec{E}_1$$

$$\overrightarrow{MR} = \frac{dX''}{\sqrt{2}} \left[(1+k) \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right]$$

On obtient ainsi la longueur de l'élastique dans la configuration actuelle.

$$dx'' = dX'' \sqrt{\frac{2+2k+k^2}{2}}$$



Et on peut enfin déterminer la dilatation linéaire au point M_0 dans la direction de la bissectrice.

$$\varepsilon(M_0; \vec{a}) = \sqrt{\frac{2+2k+k^2}{2}} - 1$$

8.

Ce dernier calcul montre la complexité grandissante de notre méthode avec clous et élastiques. Même si c'est sympathique du point de vue intellectuel, on ne peut continuer ainsi et il faut avoir une autre technique pour accéder plus rapidement au résultat recherché.

Pour cela nous allons utiliser le lien entre la dilatation linéaire et le tenseur de Green Lagrange :

$$\varepsilon(M_0; \vec{n}) = \sqrt{1 + \vec{n} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{n}} - 1$$

On doit calculer le résultat du produit scalaire situé sous la racine carrée. En notation matricielle, les représentants du vecteur et du tenseur doivent être exprimés dans la même base. D'autre part, nous avons vu qu'il était nécessaire de transposer le représentant matriciel du premier vecteur.

$$\vec{n} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{n} = 2(n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi rapidement le résultat concernant la dilatation linéaire dans la direction \vec{E}_1

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_1) = \sqrt{1 + \vec{E}_1 (2 \overline{\overline{E}}) \vec{E}_1} - 1 = \sqrt{1 + 2 E_{11}} - 1 = 0$$

Il en est de même pour la dilatation linéaire dans la direction \vec{E}_2

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_2) = \sqrt{1 + \vec{E}_2 (2 \overline{\overline{E}}) \vec{E}_2} - 1 = \sqrt{1 + 2 E_{22}} - 1 = \sqrt{1 + k^2} - 1$$

Pour la dilatation linéaire selon la bissectrice, il ne faut pas oublier que pour l'application de la formule le vecteur doit être unitaire

$$\vec{a} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2k+k^2}{2}$$

Et on obtient bien le résultat déjà vu.

$$\varepsilon(M_0; \vec{a}) = \sqrt{1 + \vec{a} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{a}} - 1 = \sqrt{\frac{2+2k+k^2}{2}} - 1$$

Enfin avec la formule, il est simple de calculer la dilatation linéaire selon la trissectrice

$$\vec{b} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2k+k^2}{3}$$

$$\varepsilon(M_0; \vec{b}) = \sqrt{1 + \vec{b} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{b}} - 1 = \sqrt{\frac{3+2k+k^2}{3}} - 1$$

9.

Pour l'expression de la distorsion angulaire de l'angle formé entre les directions \vec{E}_1 et \vec{E}_2 on peut essayer de revenir sur la figure. En effet en comparant les positions des points entre la configuration de référence et la configuration actuelle on peut faire apparaître l'angle de distorsion.

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2) = Q_0 M_0 P_0 - QPM$$

On peut alors avoir facilement le sinus de cet angle.

$$\sin[\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2)] = \frac{k dX'}{\sqrt{dX'^2 + k^2 dX^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

Toutefois, à nouveau nous ne pourrions pas travailler ainsi avec nos clous et élastiques et pour obtenir nos distorsions angulaires nous utiliserons une formule.

$$\gamma(M_0; \vec{N}, \vec{M}) = \arcsin \left[\frac{\vec{N} \cdot (2\vec{E}) \vec{M}}{\sqrt{1 + \vec{N} \cdot (2\vec{E}) \vec{N}} \sqrt{1 + \vec{M} \cdot (2\vec{E}) \vec{M}}} \right]$$

L'application de la formule permet de retrouver le résultat précédent.

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2) = \arcsin \left[\frac{2 E_{12}}{\sqrt{1+2 E_{11}} \sqrt{1+2 E_{22}}} \right] = \arcsin \left[\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \right]$$

Par contre, la formule ne peut pas être employée pour calculer la distorsion angulaire de l'angle initialement formé entre la direction \vec{E}_1 et la bissectrice. En effet cet angle formé n'est pas un angle droit et la notion de distorsion angulaire n'est définie que pour des vecteurs initialement orthogonaux.

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{a})$$

10.

La valeur de la constante étant définie, on peut reprendre la figure en travaillant à l'échelle. On constate qu'en fait les vecteurs déplacements sont très faibles et que nous ne pouvons distinguer la configuration actuelle de la configuration de référence.

D'autre part, ce dernier étant infinitésimal, on peut négliger le terme non nul du tenseur de Green Lagrange.

$$\overline{\overline{\overline{E}}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i) \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Ces composantes représentent en fait le tenseur déformation qui est la partie symétrique du tenseur gradient du champ de déplacement.

$$\overline{\overline{\overline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \left[\overline{\overline{\overline{\mathbf{Grad} \vec{U}}} + \left(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Grad} \vec{U}}} \right)^T} \right]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Il est tout aussi simple d'obtenir les composantes du tenseur anti-symétrique.

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} \left[\overline{\text{Grad } \vec{U}} - \left(\overline{\text{Grad } \vec{U}} \right)^T \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

11.

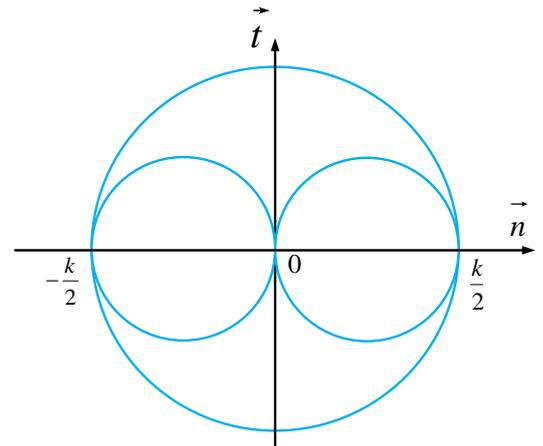
Pour la représentation du tricerclé de Mohr il faut connaître les trois valeurs propres du tenseur des déformations. Ce qui revient à déterminer les racines du polynôme caractéristique.

$$\det(\overline{\varepsilon} - \lambda \overline{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & k/2 & 0 \\ k/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \left(\lambda + \frac{k}{2} \right) \left(\lambda - \frac{k}{2} \right)$$

On obtient ainsi les trois déformations principales que l'on va ordonner de la plus grande vers la plus petite.

$$\varepsilon_I = \frac{k}{2}; \varepsilon_{II} = 0; \varepsilon_{III} = -\frac{k}{2}$$

On place dans le plan de Mohr trois points sur l'axe horizontal ayant des abscisses déterminées par ces valeurs. Sachant que deux points au hasard constituent le diamètre d'un cercle, on peut alors tracer le tricerclé de Mohr.



12.

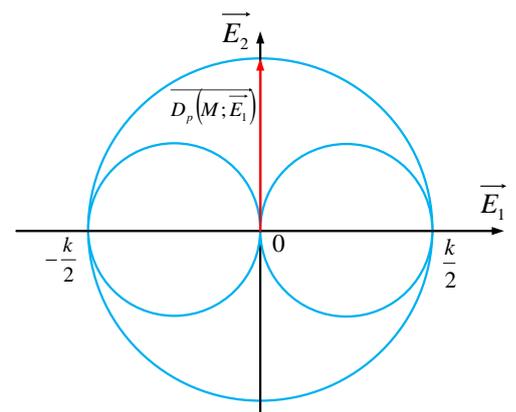
Pour pouvoir représenter sur ce tricerclé un vecteur déformation pure, il faut tout d'abord calculer ce vecteur.

$$\overline{D}_p(M; \vec{n}) = \overline{\varepsilon}(M) \cdot \vec{n}$$

Le premier vecteur est celui associé à la direction \vec{E}_1

$$\overline{D}_p(M; \vec{E}_1) = \overline{\varepsilon}(M) \cdot \vec{E}_1 = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \vec{E}_2$$

Pour représenter ce vecteur sur le plan de Mohr il faut tout d'abord dire que le vecteur normal \vec{n} est confondu avec le vecteur \vec{E}_1 . Comme la projection du vecteur sur l'axe normal \vec{E}_1 est nulle, on en déduit que la composante normale est nulle et que le vecteur est purement tangentiel, c'est-à-dire porté par le vecteur \vec{t} . Donc tout naturellement ce dernier sera pris égal au vecteur \vec{E}_2 et on peut représenter le vecteur déformation pure.

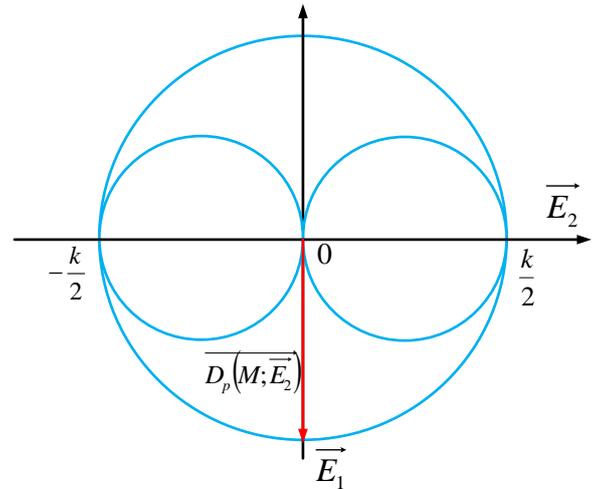


13.

Maintenant on calcule le vecteur déformation pure dans la direction \vec{E}_2 .

$$\overline{D}_p(M; \vec{E}_2) = \overline{\varepsilon}(M) \cdot \vec{E}_2 = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \vec{E}_1$$

Pour la représentation sur le plan de Mohr, il faut indiquer que cette fois le vecteur normal \vec{n} est confondu avec le vecteur \vec{E}_2 . A nouveau la composante normale du vecteur déformation pure est nulle. Par respect de l'orientation que nous avons pris précédemment nous dirons que le vecteur tangent \vec{t} est opposé au vecteur \vec{E}_1 . Nous pouvons donc représenter le vecteur déformation pure. On constate que les deux vecteurs déformations pures se retrouvent opposés dans la représentation de Mohr alors que dans l'espace ils sont orthogonaux. Ceci est dû au fait que pour la représentation sur le plan de Mohr, l'axe normal est toujours l'axe d'étude, en l'occurrence \vec{E}_1 puis \vec{E}_2 et que dans l'espace il y a une rotation de 90° entre ces deux axes.



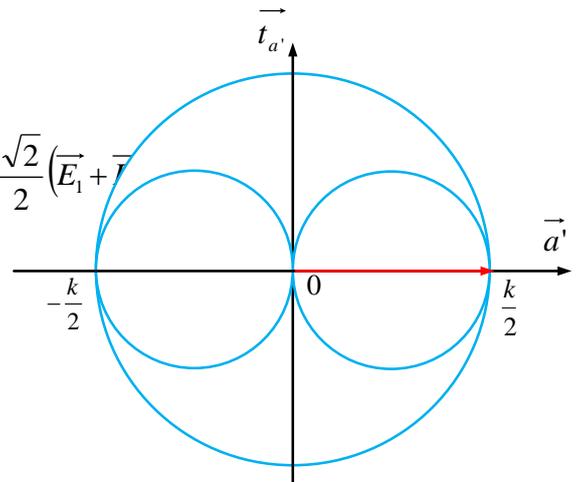
14.

Dans le cas de la bissectrice, il faut tout d'abord définir le vecteur unitaire associé à cette direction.

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\sqrt{2} \vec{a}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

On peut alors calculer les composantes du vecteur déformation pure.

$$D_p(M; \vec{a}') = \overline{\varepsilon(M)} \cdot \vec{a}' = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$



Comme dans les cas précédents, pour la représentation sur le tricerle de Mohr, il faut dire que le vecteur normal d'étude \vec{n} est en fait le vecteur \vec{a}' . De ce fait le vecteur déformation pure est simplement sur l'axe normal du tricerle.

15.

Avant de passer à l'étude dans la direction de la trisectrice, nous allons examiner les résultats obtenus afin d'en tirer quelques conclusions. Nous avons dit que dans le cas général, le vecteur déformation pure avait son extrémité à l'intérieur du tricerle de Mohr. Toutefois dans les trois cas nous obtenons des configurations particulières avec des extrémités soit sur un cercle, soit au point de jonction de deux cercles. Pour avoir l'extrémité du vecteur déformation pure sur l'un des cercles, il faut que le vecteur normal d'étude appartienne à un plan principal, ou encore soit orthogonal avec une direction principale ou vecteur propre.

Donc le vecteur \vec{E}_1 appartient à un plan principal. Comme l'extrémité du vecteur déformation pure est sur le grand cercle de Mohr passant par les valeurs propres extrémales ε_I et ε_{III} , on en déduit que le vecteur d'étude \vec{E}_1 appartient au plan des vecteurs propres extrémaux.

$$\vec{E}_1 \in (\vec{N}_I, \vec{N}_{III})$$

On a un renseignement similaire avec le fait que l'extrémité du vecteur déformation pure associé au vecteur d'étude \vec{E}_2 est sur le grand cercle de Mohr.

$$\vec{E}_2 \in (\vec{N}_I, \vec{N}_{III})$$

Donc on peut en déduire que le plan formé par les vecteurs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 est confondu avec le plan des vecteurs propres extrémaux ce qui implique que le vecteur \vec{E}_3 est égal, au signe près, au vecteur propre intermédiaire, la valeur propre associée étant nulle.

$$(\vec{E}_1, \vec{E}_2) \equiv (\vec{N}_I, \vec{N}_{III}) \Leftrightarrow \vec{E}_3 = \vec{N}_{II}$$

Ce résultat aurait pu être considéré comme évident au vu de la structure du représentant matriciel de notre tenseur déformation dans la base d'étude.

$$\varepsilon = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

D'autre part, l'extrémité du vecteur déformation pure associé à la bissectrice se trouve sur deux cercles. Donc la bissectrice est contenue dans deux plans principaux ce qui implique qu'elle est colinéaire au vecteur propre commun à ces deux plans.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}' \in (\vec{N}_I, \vec{N}_{III}) \\ \vec{a}' \in (\vec{N}_I, \vec{N}_{II}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{a}' = \vec{N}_I$$

Ce résultat aurait aussi pu être dicté à partir de l'instant où l'on a obtenu la valeur du vecteur déformation pure dans la direction de la bissectrice. La formule obtenue démontre que la bissectrice est une direction principale associée à la valeur propre la plus grande.

$$D_p(M; \vec{a}') = \varepsilon(\vec{M}) \cdot \vec{a}' = \frac{k}{2} \vec{a}' \Leftrightarrow \vec{a}' = \vec{N}_I$$

Connaissant ainsi deux directions principales, on peut en déduire la troisième. On vérifie aisément qu'elle est associée à la valeur propre la plus petite.

$$\vec{N}_{III} = \vec{N}_I \wedge \vec{N}_{II} = \vec{a}' \wedge \vec{E}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$$

$$D_p(M; \vec{N}_{III}) = \varepsilon(\vec{M}) \cdot \vec{N}_{III} = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{2} \vec{N}_{III}$$

16.

Il reste à représenter le vecteur déformation pure dans la direction de la trissectrice. A nouveau, il faut travailler avec un vecteur unitaire.

$$\vec{b}' = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3)$$

Le résultat du calcul donne les composantes dans la base d'étude.

$$\overline{D_p(M; \vec{b}')} = \overline{\varepsilon(M)} \cdot \vec{b}' = \frac{k\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k\sqrt{3}}{6} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

Cette forme n'est pas aussi simple que dans les autres cas, aussi pour représenter le vecteur déformation pure nous allons tout d'abord calculer sa projection sur le vecteur d'étude ce qui nous donnera la composante normale.

$$N = \overline{D_p(M; \vec{b}')} \cdot \vec{b}' = \frac{k\sqrt{3}}{6} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) = \frac{k}{3}$$

Ensuite on pourrait essayer de calculer la composante tangentielle mais la formule est compliquée.

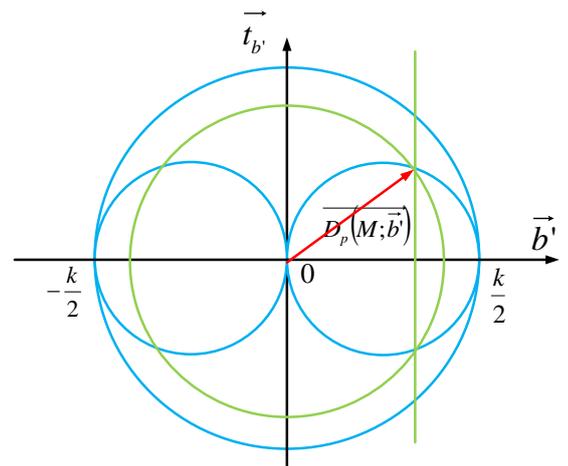
$$T = \left\| \vec{b}' \wedge \overline{D_p(M; \vec{b}')} \wedge \vec{b}' \right\|$$

Pour obtenir le point désiré on peut se contenter de calculer la norme du vecteur déformation pure.

$$\left\| \overline{D_p(M; \vec{b}')} \right\| = \frac{k\sqrt{3}}{6} \left\| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right\| = \frac{k\sqrt{6}}{6}$$

Connaissant donc cette norme et la composante normale, on peut positionner le point extrémité du vecteur déformation pure. Il est à l'intersection de la verticale passant par la valeur de la composante normale sur l'axe horizontal et du cercle dont le centre est l'origine du repère et le rayon est la norme du vecteur déformation pure. Par construction, on constate que ce point est situé sur le petit cercle de Mohr. Après réflexion ce résultat est logique dès lors que l'on a vérifié que la direction de la trisectrice est orthogonale au vecteur propre à valeur propre minimale.

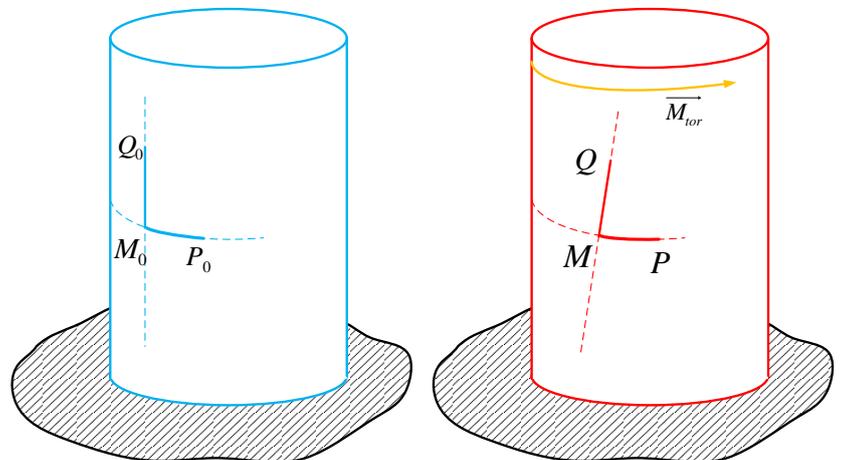
$$\vec{b}' \cdot \vec{N}_{III} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \right) = 0$$



17.

En complément à cette étude théorique, nous allons réfléchir sur un problème de torsion d'une poutre droite à section circulaire constante. On imagine que cette poutre est encastree à une extrémité et que l'on applique à l'autre extrémité un torseur d'effort réduit au centre de surface à un couple porté par l'axe de la poutre.

Avant l'application du chargement, on aura positionné trois points M_0 , P_0 et Q_0 à mi-hauteur de la poutre sur la surface extérieure. La direction donnée par deux points M_0 et P_0 est circonférentielle alors que la direction des deux points M_0 et Q_0 est axiale.

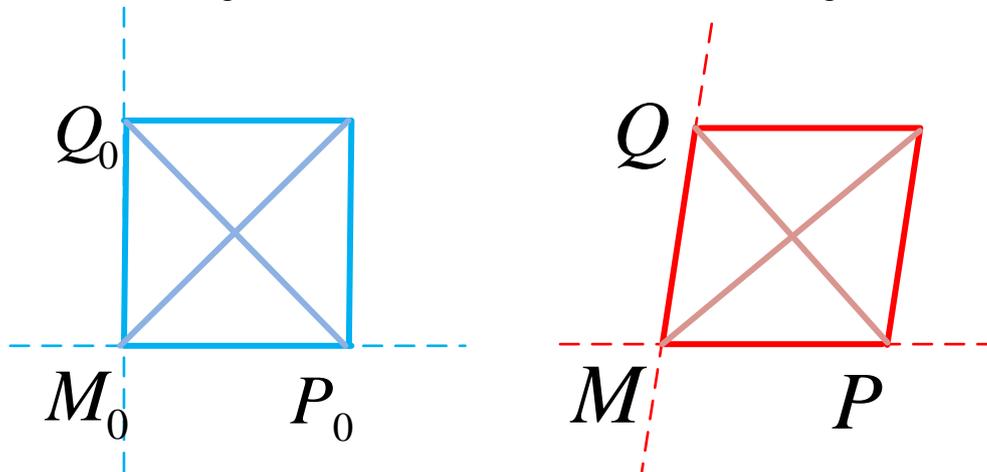


Après application du chargement ces points se sont déplacés. Ils restent sur la surface cylindrique. Les deux points M_0 et P_0 restent sur la même section horizontale et leurs déplacements ont la même valeur. Par contre le déplacement horizontal du point Q_0 est différente.

En considérant que les points sont infiniment proches et en développant le plan tangent au cylindre, on obtient la figure vu en début d'exercice.

On peut compléter cette figure en imaginant que ces points forment dans la configuration de référence un carré. Ce dernier va se retrouver sous une forme de losange dans la configuration actuelle. On constate que l'angle droit n'est pas conservé dans la transformation.

En ayant représenté les diagonales du carré dans la configuration de référence, on constate qu'elles restent orthogonales dans la configuration actuelle. On est dans les directions principales. De plus on constate un fort allongement selon une diagonale et un raccourcissement selon l'autre diagonale.



Concrètement, lorsque l'on sollicite en torsion un petit morceau de craie jusqu'à la rupture, on constate que cette dernière se fait selon une hélicoïdale présentant un angle de 45° avec la direction axiale. Perpendiculairement au plan de rupture, on trouve la direction principale associée à la valeur propre la plus forte. Ainsi que nous le dit le tricerclé de Mohr, c'est dans cette direction que l'on trouve la dilatation linéaire la plus forte.

18.

Cette petite application nous a montré que les résultats expérimentaux et théoriques sont en correspondance. Cela nous montre aussi l'importance des directions principales qui représentent les directions à valeurs de déformations extrêmes, c'est-à-dire les directions dans lesquelles on pourrait obtenir des ruptures.