

Mécanique des solides déformables

Auteur
Michel MAYA

1 – Descriptions

Ce cours est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons
Paternité + Pas d'utilisation commerciale + Pas de modification 4.0 International



1-1 DESCRIPTIONS

Notations et variables

1.

Cette semaine nous allons étudier les modes de représentation des grandeurs que nous allons rencontrer dans notre cours. La plupart d'entre vous est déjà familiarisé avec la notion de vecteur et sa représentation graphique. Conduit à utiliser la notion de tenseurs, nous allons décrire les outils nécessaires pour les représenter et travailler avec soit sous forme indicielle, soit sous forme graphique ce qui fera l'objet de deux leçons pour cette semaine. Sans plus tarder commençons par cette première leçon qui va nous permettre d'appréhender le mode de description de nos entités. Nous commencerons par définir les variables utilisées pour faire une description de l'état mécanique.

2.

Les problèmes que nous auront à traiter seront relativement complexes et en conséquence, il y a de fortes chances que nous ne puissions obtenir une réponse mathématique satisfaisante. Afin d'aboutir dans nos calculs, nous serons obligés de faire des hypothèses qui auront pour objet essentiel de simplifier les modèles mathématiques à traiter. Ces hypothèses, nous les formulerons progressivement au cours de l'enseignement. Notre première hypothèse sera de dire que le domaine que nous étudions est un milieu continu en évolution continue au cours du temps.

Un domaine sera dit continu si toutes les fonctions qui le caractérisent sont des fonctions spatiales continues, c'est-à-dire si elles sont infiniment dérivables dans l'espace. Ainsi par exemple, la masse volumique, la température, la pression au sein d'un fluide, la vitesse des points d'un solide doivent être des fonctions ne présentant pas de discontinuité. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas toujours évident de respecter cette condition de continuité.

On peut avoir une discontinuité évidente lorsque l'on considère un domaine constitué d'eau et d'huile. Manifestement, au niveau de la surface de séparation des deux liquides, la masse volumique présente une discontinuité. Ceci étant, on pourra utiliser la mécanique des milieux continus pour traiter un problème de mélange eau huile. Il suffit de traiter séparément l'eau, considérée comme continue, et l'huile, fluide aussi continu, puis de rassembler les morceaux et d'écrire correctement les équations qui régissent l'interface entre les deux liquides. C'est bien entendu plus simple à faire lorsque les deux liquides sont miscibles et qu'ils forment ensemble un milieu continu.

Mais, bien que le vin soit miscible dans l'eau, le mélange obtenu s'il donne une impression de continuité, ne l'est plus dès lors que l'on regarde à l'échelle de l'atome. Bien entendu, à cette échelle, aucun domaine n'est continu. Mais à une échelle plus humaine, on a une impression de continuité. En admettant que le mélange eau vin est continu, on fait donc une hypothèse simplificatrice qui nous permettra de travailler avec des fonctions dérivables, et donc qui facilitera la résolution de notre problème. Plus l'hypothèse sera grossière, et plus il faut s'attendre à des écarts entre nos résultats de calcul et la réalité.

En considérant que le béton armé est continu, on peut s'attendre à des résultats un peu faussés. Mais ils seront proportionnellement beaucoup moins faux pour le calcul des piliers du viaduc de Millau, que pour le

calcul d'un plancher d'un appartement. On conçoit assez facilement que sur de grandes structures, le béton armé est plus continu que sur des petites.

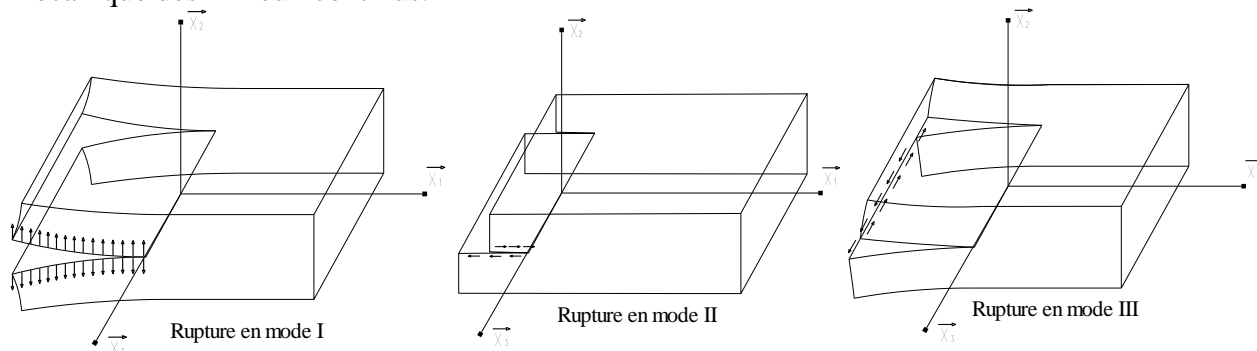
3.

Toutefois, la continuité spatiale n'est pas suffisante. Il faut aussi avoir une continuité temporelle. Les fonctions caractéristiques de notre domaine doivent être aussi infiniment dérivables vis-à-vis de la variable temps.

Ainsi par exemple, la masse volumique d'un corps que l'on réchauffe sera une fonction continue au cours du temps. A nouveau cette continuité dans le temps n'est pas toujours acquise.

Les phénomènes de cavitation sont un exemple de discontinuité. Lorsqu'au sein de l'eau liquide on passe en un point en dessous de la pression de vapeur saturante, une bulle de vapeur se forme instantanément. Bien entendu la masse volumique va alors brutalement varier.

De même la mécanique de la rupture qui a pour objet l'étude de la propagation de fissures dans un domaine fourmille d'exemple de fonctions discontinues, comme par exemple le déplacement d'un point. Mais à nouveau, par des artifices, nous arriverons à traiter la mécanique de la rupture en prenant pour base la mécanique des milieux continus.



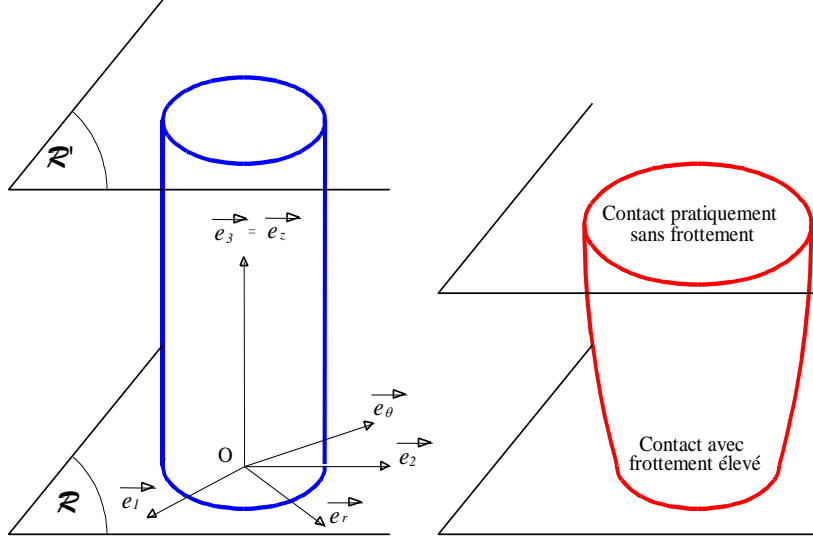
4.

Avant de définir les variables que l'on peut utiliser pour faire une étude, il convient de préciser comment seront repérées ces variables. Et pour cela nous allons définir les notions de référentiels et de repères.

Le référentiel est attaché à l'observateur. Il représente l'ensemble des points animés d'un mouvement de corps rigide par rapport à l'observateur. Les fonctions étudiées seront définies par rapport à ce référentiel. Pour des fonctions scalaires, telles que la température, ou la masse volumique, le référentiel est suffisant pour les caractériser. Quand on parle de température en un point d'un corps, on désigne la valeur d'une fonction scalaire dont on mesure l'écart par rapport à un référentiel. Par contre, pour des fonctions plus complexes comme des fonctions vectorielles telles que la vitesse d'un point, il est d'usage courant de les symboliser par leurs composantes sur des repères.

Pour des besoins de simplification de visualisation, mais pas nécessairement d'écriture, nous associerons donc des repères aux référentiels utilisés. Ce repère, caractérisé par le choix d'un point dit origine et d'une base, nous permettra de décrire des fonctions scalaires qui ne seront pas moins que les composantes de la fonction vectorielle dans le repère. Bien évidemment, il est possible d'associer plusieurs repères à un référentiel. Ainsi, tout en gardant le même point origine, on pourra parler de repère cartésien ou de repère curviligne comme le repère cylindrique. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est que n'est pas en changeant de repère, donc de composantes étudiées, que l'on changera fondamentalement la fonction complexe étudiée. On parle alors de fonction tensorielle.

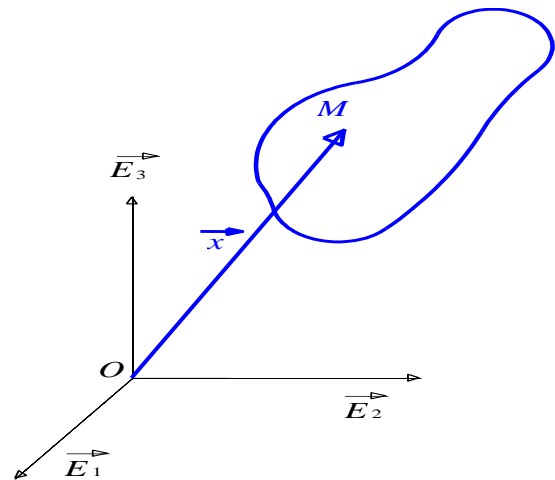
Dans l'exemple de l'écrasement d'un lopin entre les deux plateaux d'une presse, on peut définir deux référentiels différents. L'un est associé au plateau supérieur, l'autre au plateau inférieur. Il est indispensable que les deux observateurs dépendants de ces deux référentiels traduisent, dans leur référentiel, et éventuellement si nécessaire avec leur repère, le même phénomène physique et qu'ils puissent l'un et l'autre échanger leurs informations sans problème. C'est la propriété d'objectivité du phénomène. L'état final du lopin doit objectivement être le même pour l'observateur lié au plateau supérieur que pour l'observateur lié au plateau inférieur.



5.

Le choix d'un référentiel, et éventuellement d'un repère, étant fait, on peut maintenant envisager de décrire l'évolution de nos variables d'étude. En ce qui nous concerne, nous utiliserons l'école lagrangienne pour le choix des variables d'études. Mais avant, donnons quelques informations sur la notation indicielle que nous allons utiliser.

Considérons donc un repère associé à un point origine noté O et une base. Les vecteurs de la base seront notés \vec{E}_1 , \vec{E}_2 et \vec{E}_3 avec des indices et non pas X, Y et Z comme cela est souvent utilisé.



Le positionnement d'un point M quelconque de l'espace est donné par le vecteur OM défini dans notre référentiel. Pour avoir une représentation de ce vecteur, on utilisera les composantes scalaires X_1 , X_2 et X_3 obtenues par projection du vecteur position sur les vecteurs de base.

On pourra donc écrire $\vec{OM} = x_1 \vec{E}_1 + x_2 \vec{E}_2 + x_3 \vec{E}_3$.

Cette notation étant un peu longue à écrire, en général, on préfère une notation plus abrégée avec le signe de sommation : $\vec{OM} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{E}_i$. L'indice i prend alors trois valeurs ce qui nous donne les trois termes de notre vecteur.

Mais comme nous travaillons presque systématiquement dans un espace vectoriel de dimension 3, une simplification nouvelle dans l'écriture peut être apportée en enlevant le signe de sommation : $\vec{OM} = x_i \vec{E}_i$. L'expression devient alors très concentrée. Cette écriture ne traduit plus que le strict nécessaire. On obtient ainsi la convention de notation dite d'Einstein.

6.

La convention d'Einstein utilise largement la notation indicielle. La règle est relativement simple : si dans un monôme un indice est doublé, alors il y a sommation automatique pour cet indice sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Dans nos applications, comme nous resterons majoritairement dans un espace vectoriel à trois dimensions, cela implique que l'indice doublé peut prendre les valeurs 1, 2 et 3. Un tel indice est dit indice muet. Il peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre, cela ne change rien au résultat. Un indice qui n'est pas répété dans le monôme est dit indice réel ou encore par opposition indice parlant. Un indice réel doit se trouver à l'identique de part et d'autre d'une égalité. Il est nécessairement unique. Dans la convention d'Einstein, on ne peut trouver que des indices doublés, donc muets, ou des indices uniques, donc réels. On ne peut pas trouver par exemple des indices triplés ou quadruplés. Dans les exemples donnés, on trouve en deuxième ligne le produit scalaire de deux vecteurs. La dernière expression représente l'une des formes simples de la loi de Hooke. Les connaisseurs apprécieront.

En jaune : indice muet En rouge : indice réel

$$U = a_{ij} b_i c_j = a_{lm} b_l c_m = a_{ij} b_l c_j \quad V_k = a_{km} b_m$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_i \vec{E}_i) \cdot (b_j \vec{E}_j) = a_m b_n \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n$$

$$\vec{OM} = x_i \vec{E}_i \quad \vec{A} = t_{ij} p_i \vec{E}_j \quad \sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

7.

Nous allons traiter quelques petits exemples afin de nous familiariser un peu avec cette notation qui sera régulièrement employée dans notre cours.

Reprenons tout d'abord la formule précédemment donnée pour le produit scalaire de deux vecteurs quelconques. On voit que le résultat dépend du produit scalaire des vecteurs qui constituent notre base. Dans le cas général, cette base sera orthonormée. Le produit scalaire de deux vecteurs unitaires vaut 0 si les deux vecteurs sont orthogonaux et 1 si les deux vecteurs sont confondus.

Produit scalaire

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_i \vec{E}_i) \cdot (b_j \vec{E}_j) = a_m b_n \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n$$

$$\vec{E}_m \cdot \vec{E}_n = \delta_{mn} \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \left(\vec{E}_m \perp \vec{E}_n \right) \\ 1 \text{ si } m = n \left(\vec{E}_m = \vec{E}_n \right) \end{cases}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_m b_n \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n = a_m b_n \delta_{mn}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_m b_n \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n = a_m b_m = a_i b_i$$

On utilisera alors le symbole de Kronecker pour traduire ce résultat. Dans ce symbole, si les deux indices qui le composent sont différents, il vaut 0 et si les deux indices sont identiques, il vaut 1.

Dès lors, dans la double sommation qui traduit le produit scalaire, il n'est pas utile de garder les termes pour lesquels les deux indices sont différents.

En ne gardant que les termes ayant des indices identiques pour le symbole de Kronecker, ce dernier vaut 1. Et le résultat final est dès lors très simple.

8.

On peut aussi s'intéresser à l'expression indicielle de certains opérateurs couramment employés en physique.

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Campus de CLUNY

Pour cela considérons tout d'abord une fonction continue scalaire $s(M) = s(x_i)$ définie en tout point de l'espace. On admet que la valeur de cette fonction dépend de la position du point, position donnée par les variables x_i . On parlera d'un champ scalaire.

On peut alors envisager de regarder, par l'intermédiaire de l'opérateur gradient, quelles sont les variations spatiales de notre fonction. On obtient un vecteur. Dans un repère cartésien, les composantes de ce vecteur sont données par les dérivées partielles de la fonction $s(x_i)$ vis-à-vis respectivement des variables de position.

On peut aussi considérer une fonction continue vectorielle V définie elle aussi en tout point de l'espace. Cette fois, ce sont les composantes dans une base cartésienne qui seront dépendantes de la position du point. On parlera d'un champ vectoriel.

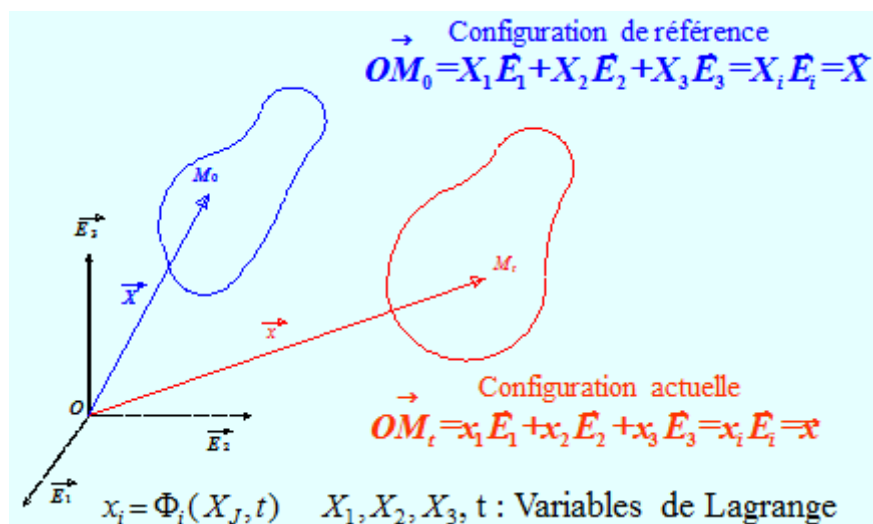
$$\begin{aligned}
 s(M) &= s(x_i) \text{ avec } \overrightarrow{OM} = x_i \overrightarrow{E}_i \\
 \overrightarrow{\text{grad}}(s) \cdot d\overrightarrow{OM} &= ds \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}}(s) = \frac{\partial s}{\partial x_i} \overrightarrow{E}_i \\
 \overrightarrow{V}(M) &= V_i(M) \overrightarrow{E}_i = V_i(x_j) \overrightarrow{E}_i \\
 \text{div}(\overrightarrow{V}) &= \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \\
 \text{div}(s \overrightarrow{V}) &= \frac{\partial (s V_i)}{\partial x_i} = s \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial s}{\partial x_i} V_i = s \text{div}(\overrightarrow{V}) + \overrightarrow{\text{grad}}(s) \cdot \overrightarrow{V}
 \end{aligned}$$

On peut donner l'expression de la divergence d'un vecteur. On obtient alors une fonction scalaire dont la valeur est la somme des dérivées partielles des composantes vis-à-vis respectivement des variables de position. A partir de ces résultats, on peut facilement en obtenir d'autres.

Par exemple, si l'on veut exprimer la divergence d'une fonction vectorielle multipliée par une fonction scalaire, il nous suffit de faire le calcul avec la notation indicielle pour obtenir le résultat.

9.

Afin d'étudier l'évolution d'un domaine, il faut tout d'abord se donner un référentiel d'étude. Pour des questions de facilité de représentation, on associera un repère à ce référentiel. On pourra alors, pour un instant choisi arbitrairement comme initial, déterminer l'ensemble des vecteurs positions des particules matérielles constituant le domaine. On définit ainsi la configuration de référence. Pour décrire le mouvement du domaine par rapport à ce référentiel, il convient de se donner la loi d'évolution au cours du temps des vecteurs positions.



On obtient alors un champ vectoriel fonction du temps. Cela nous donnera la configuration actuelle. Dans un premier temps, nous adopterons par convention des lettres majuscules pour la configuration de référence et des lettres minuscules pour la configuration actuelle.

On constate qu'il faut être capable de donner les lois d'évolution des paramètres de position actuelle en fonction des paramètres de position initiale et du temps pour connaître

l'évolution du domaine. Les paramètres de position initiale et le temps constituent les variables de Lagrange.

10.

Le vecteur vitesse d'un point est obtenu par dérivation par rapport au temps du vecteur position. Si la base utilisée pour la représentation est une base cartésienne, c'est-à-dire avec des vecteurs indépendants de l'espace et du temps, les composantes du vecteur vitesse dans cette base seront obtenues simplement par dérivation par rapport au temps des composantes du vecteur position. Comme dans les variables de Lagrange, la position initiale du point est indépendante du temps, on peut utiliser indifféremment une dérivée droite ou une dérivée partielle pour calculer les composantes du vecteur vitesse.

Vitesse

$$\vec{V}(M,t) = \frac{d\vec{OM}_t}{dt} \quad x_i = \Phi_i(X_J, t)$$

$$v_i = \frac{d\Phi_i}{dt}(X_J, t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(X_J, t)$$

Accélération

$$\vec{\gamma}(M,t) = \frac{d\vec{V}(M,t)}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}_t}{dt^2}$$

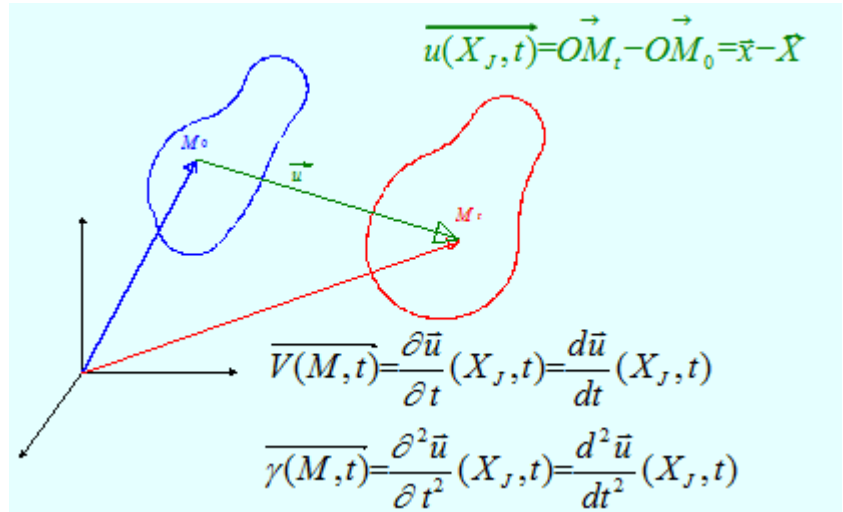
$$\gamma_i = \frac{d^2\Phi_i}{dt^2}(X_J, t) = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}(X_J, t)$$

Pour le vecteur accélération, les calculs sont tout aussi simples à partir de l'instant où l'on sait qu'il suffit de dériver par rapport au temps le vecteur vitesse. On peut aussi dériver deux fois le vecteur position.

11.

Mais on peut aussi utiliser le vecteur déplacement pour exprimer les quantités précédentes. Le déplacement d'un point représente la différence entre le vecteur position dans la configuration actuelle et le vecteur position dans la configuration de référence.

Sachant que le vecteur position dans la configuration de référence est indépendant du temps t , on peut alors facilement démontrer que le vecteur vitesse est obtenu par simple dérivation du vecteur déplacement. Pour le vecteur accélération il faudra dériver deux fois.



$\vec{u}(X_J, t) = \vec{OM}_t - \vec{OM}_0 = \vec{x} - \vec{X}$

$$\vec{V}(M,t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(X_J, t) = \frac{d\vec{u}}{dt}(X_J, t)$$

$$\vec{\gamma}(M,t) = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(X_J, t) = \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}(X_J, t)$$

12.

En conclusion de cette leçon, nous retiendrons qu'il est utile de définir notre référentiel pour pouvoir communiquer tous nos résultats. Nous avons aussi vu que la notation indicielle peut permettre de simplifier les démonstrations. Enfin nous sommes entrés en contact avec la description lagrangienne.

1-2 DESCRIPTIONS

Représentations graphiques

1.

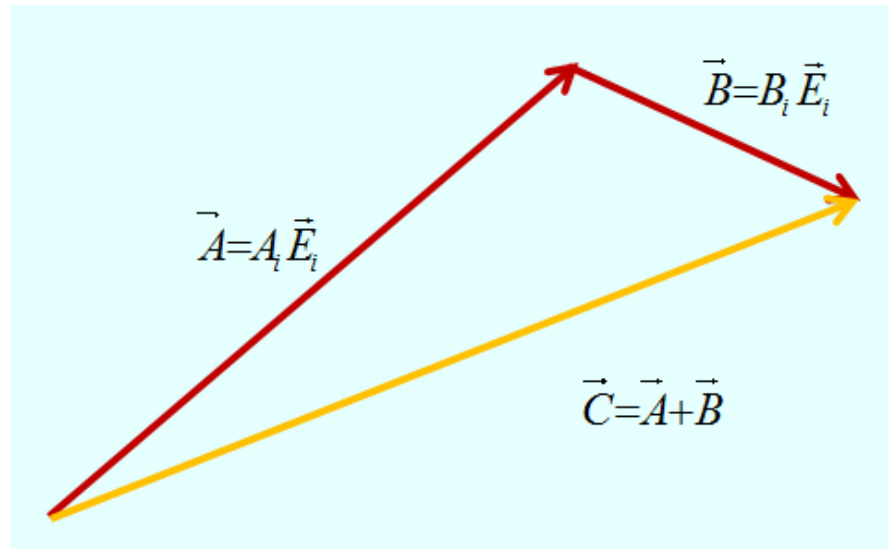
Ainsi que nous le constaterons ultérieurement, nous ferons beaucoup usage d'entités mathématiques dénommées tenseurs symétriques du second ordre. Les différentes composantes de ces tenseurs dans une base tridimensionnelle se présenteront sous forme d'une matrice carrée d'ordre 3 symétrique. Cette notion étant nouvelle pour beaucoup d'entre vous, il est nécessaire d'en donner des représentations graphiques pour aider à sa compréhension.

2.

Concrètement, c'est ce que nous avons fait lorsque nous avons associé un vecteur avec origine, intensité, direction et sens à une forme rectiligne terminée par une flèche.

Le vecteur étant en fait un tenseur du premier ordre, nous avons établi une bijection avec un élément graphique.

Cela nous a permis d'assimiler plus facilement la notion d'addition de ces tenseurs et de comprendre pourquoi le module d'un vecteur somme n'est pas la somme des modules des vecteurs constituant cette somme.



3.

Un tenseur du second ordre peut être donné par son représentant dans la base des vecteurs propres, ce représentant étant alors une matrice diagonale. Il est à noter que la base des vecteurs propres représente ce que l'on appellera les directions principales.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix} (\vec{N}_i)$$

Par l'intermédiaire de cette application tensorielle, à chaque vecteur unitaire de l'espace $\vec{n} = n_i \vec{N}_i$, on peut associer un vecteur image $\vec{A}(\vec{n}) = \mathbf{T} \vec{n}$ dont il est possible de calculer aisément les composantes dans la base

des vecteurs propres. $\vec{A}(\vec{n}) = A_i \vec{N}_i$ et
$$\begin{cases} A_1 = T_I n_1 \\ A_2 = T_{II} n_2 \\ A_3 = T_{III} n_3 \end{cases}$$

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

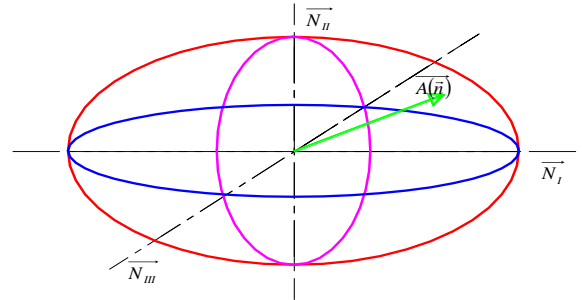
Campus de CLUNY

En prenant initialement un vecteur unitaire, on constate alors qu'il existe une relation entre les composantes

du vecteur image $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 = \frac{A_1^2}{T_I^2} + \frac{A_2^2}{T_{II}^2} + \frac{A_3^2}{T_{III}^2}$.

Avec cette relation, en considérant que les composantes du vecteur A représentent les coordonnées d'un point de l'espace, on constate que tous les points possibles se trouvent sur un ellipsoïde appelé ellipsoïde de Lamé.

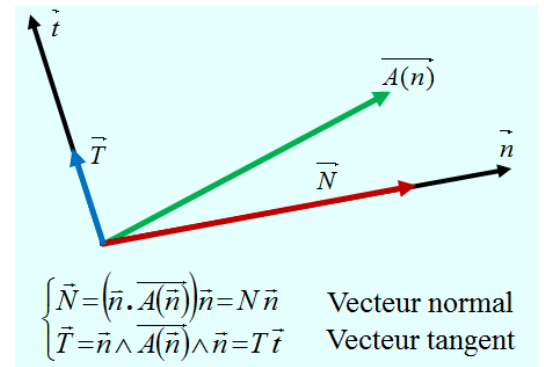
Cette première représentation graphique tridimensionnelle permet de constater que les valeurs propres représentent les valeurs extrêmes de l'état tensoriel.



4.

Nous allons voir comment obtenir graphiquement la construction d'une ellipse définie par intersection de l'ellipsoïde avec un plan principal. Pour cela nous allons nous placer dans le plan formé par le vecteur unitaire d'étude et son vecteur image par l'application tensorielle.

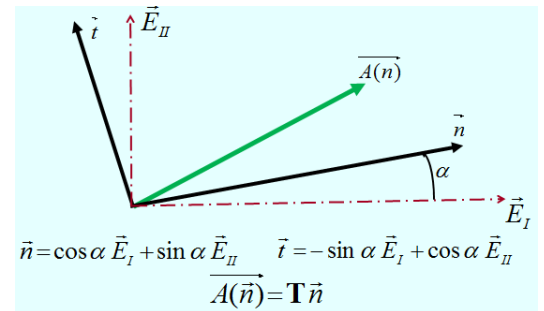
On désigne par N la projection du vecteur image sur le vecteur d'étude. La projection du vecteur image sur le plan orthogonal au vecteur d'étude nous donne un vecteur, appelé vecteur tangent, pour lequel nous pouvons associer un vecteur unitaire. A partir du vecteur unitaire d'étude et de son vecteur image, des relations permettent de calculer aisément le vecteur normal et le vecteur tangent.



5.

On considère un vecteur unitaire appartenant à un plan principal et formant un angle alpha avec une direction principale.

On peut calculer et définir son image par l'application tensorielle.



6.

Il est possible de donner les composantes de ce vecteur image dans la base des vecteurs propres.

$$\vec{A}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 = T_I \cos \alpha \\ A_2 = T_{II} \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_I \\ \vec{E}_{II} \\ \vec{E}_{III} \end{pmatrix}$$

7.

La construction graphique animée nous montre comment on peut construire pas à pas l'ellipse de Lamé. On commence par construire l'extrémité du vecteur image associé à un vecteur unitaire n appartenant à un plan principal. Puis, en faisant varier progressivement l'angle entre la direction principale et le vecteur unitaire normal, et en recommençant la construction, on constate que l'extrémité du vecteur image décrit une ellipse. On remarquera que pour cette représentation, les vecteurs propres gardent une direction fixe vis-à-vis de l'observateur.

8.

Afin de conforter nos connaissances sur les représentations graphiques, nous allons utiliser un module interactif du projet d'enseignement MECAGORA (<http://www.mmaya.fr/Static/index.html>). Ce module utilise le logiciel VIRTOOLS. Si ce dernier n'est pas déjà opérationnel sur l'ordinateur, une installation automatique sera proposée lors de la première tentative d'utilisation.

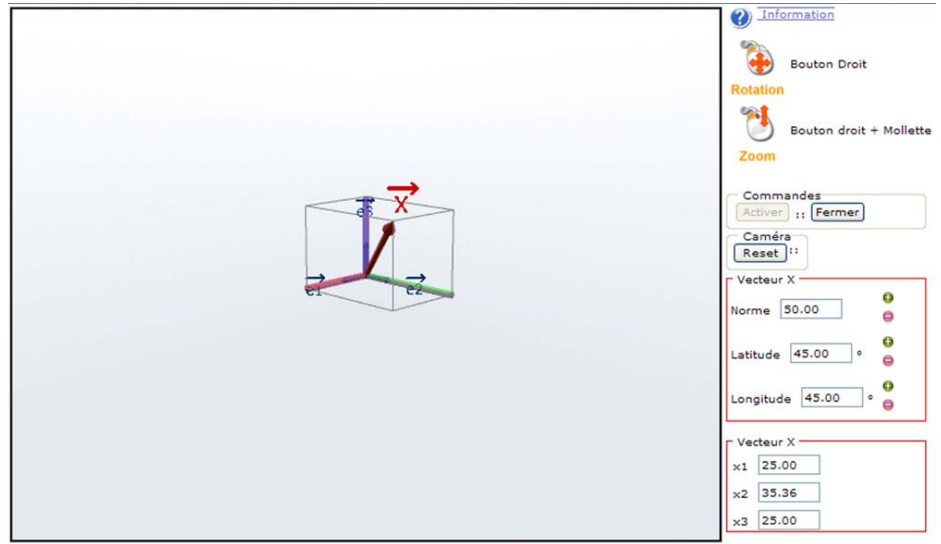
Le mode d'emploi de la souris est disponible à tout instant en cliquant sur le menu Information.

Un écran classique se compose de différentes fenêtres.

Une fenêtre de visualisation graphique contient des objets en 3 Dimensions que l'on peut déplacer de façon interactive avec la souris.

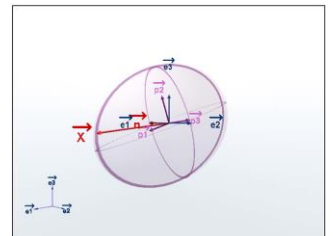
Une fenêtre de commande dans laquelle il est possible d'agir sur des valeurs de paramètres.

Et une fenêtre de résultats contenant les valeurs numériques de certaines grandeurs calculées.



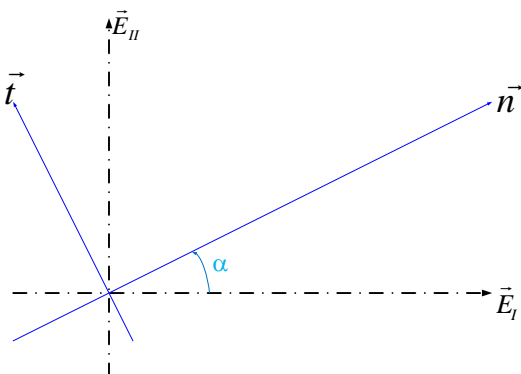
9.

Dans le projet Mécagora, le module ia4 (http://mecagora.free.fr/modules/m9/html/animation_ia4.htm) permet d'avoir une représentation de l'ellipsoïde de Lamé en fonction des valeurs données à l'application tensorielle. Si cette dernière est représentée par une matrice diagonale, la base des vecteurs propres est confondue avec la base d'étude.



10.

La représentation par ellipsoïde de Lamé est tridimensionnelle et donc peu facile à utiliser. Afin de remédier à cet inconvénient, nous allons utiliser une représentation plane. Avec les formules de changement de base on peut donner les nouvelles composantes dans la base formée par le vecteur normal et le vecteur qui lui est orthogonal et que nous appellerons vecteur tangent : $\overline{A}(\vec{n}) = A_1 \vec{E}_I + A_2 \vec{E}_{II} = a_n \vec{n} + a_t \vec{t}$



$$\begin{cases} \vec{E}_I = \cos(\alpha) \vec{n} - \sin(\alpha) \vec{t} \\ \vec{E}_{II} = \sin(\alpha) \vec{n} + \cos(\alpha) \vec{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = A_1 \cos(\alpha) + A_2 \sin(\alpha) \\ a_t = -A_1 \sin(\alpha) + A_2 \cos(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = T_I \cos \alpha \\ A_2 = T_{II} \sin \alpha \end{cases}$$

Et les formules de trigonométrie permettent de passer à l'angle double.

$$\begin{cases} a_n = T_I \cos^2 \alpha + T_{II} \sin^2 \alpha = \frac{T_I + T_{II}}{2} + \frac{T_I - T_{II}}{2} \cos(-2\alpha) \\ a_t = (T_{II} - T_I) \cos \alpha \sin \alpha = \frac{T_I - T_{II}}{2} \sin(-2\alpha) \end{cases}$$

11.

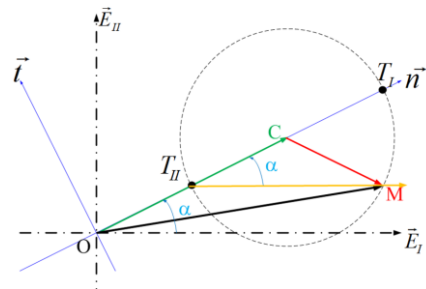
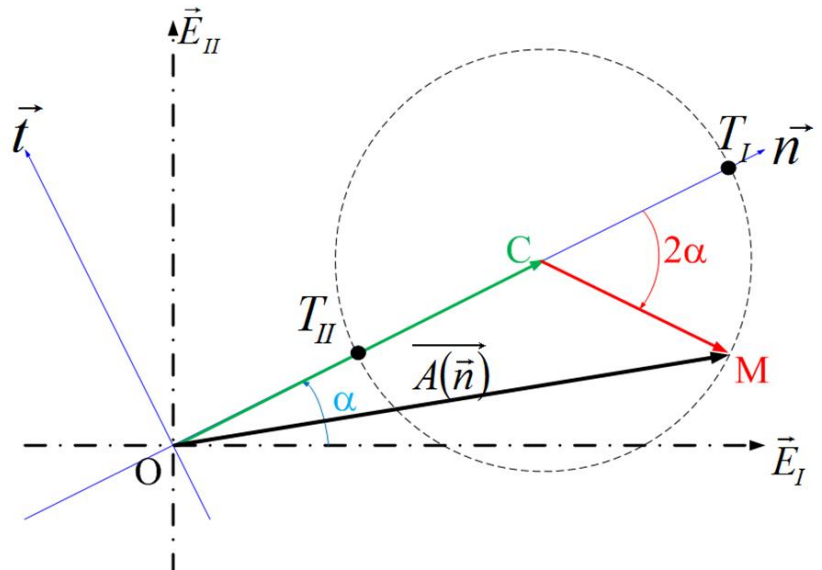
Commençons par positionner un repère plan avec une origine O et la base constituée par les vecteurs propres.

Dans ce plan on peut positionner les vecteurs n et t dont le positionnement angulaire est donné par l'angle alpha.

Sur l'axe normal, on peut repérer les deux points aux distances définies par les deux valeurs propres T_I et T_{II} . Le milieu de ces deux points nous détermine le point C tel que

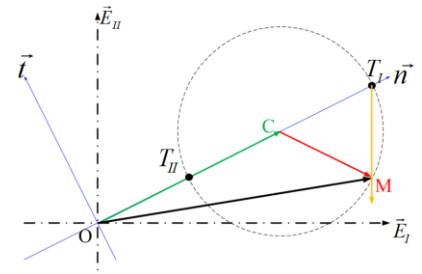
On peut maintenant représenter le vecteur CM de module $(T_I - T_{II})/2$ et formant un angle -2α avec l'axe normal

Le vecteur image $A(\vec{n})$ étant la somme vectorielle des deux vecteurs précédents, on constate sans problème que lorsque l'angle alpha varie, le point M décrit un cercle dans le repère tournant associé aux vecteurs n et t. C'est le cercle de Mohr du plan des vecteurs propres.



A partir de cette construction, on constate que lorsque que l'on trace une droite joignant le point à valeur propre minimale T_{II} au point courant du cercle M associé à notre vecteur normal n, on obtient un angle alpha avec cette normale. Cette droite est parallèle à la direction du vecteur propre maximal E_I .

Et de façon duale, la droite qui joint le point à valeur propre maximale T_I au point courant M nous donne une direction parallèle au vecteur propre minimal E_{II} . On voit que le cercle de Mohr contient de façon intrinsèque des indications sur les vecteurs propres de notre application tensorielle.



12.

Comme pour l'ellipse de Lamé, ce cercle peut être obtenu en faisant varier progressivement l'angle entre la direction principale et le vecteur unitaire normal. En faisant une construction pas à pas, on constate que le point extrémité du vecteur image décrit un cercle dans le repère associé au vecteur normal et au vecteur tangent. Mais, contrairement à la construction de l'ellipse de Lamé, les directions principales sont en

mouvement par rapport à l'observateur. En général, on représente le cercle de Mohr en plaçant l'axe normal n horizontal.

13.

Le plan contenant le vecteur unitaire normal et son vecteur image sera appelé le plan de Mohr.

Si le vecteur unitaire normal appartient à un plan principal, l'extrémité du vecteur image est situé sur un cercle dont le centre est sur l'axe normal et dont les points intersections avec l'axe normal ont des abscisses égales aux valeurs propres associées aux vecteurs propres du plan principal.

Comme nous avons en général trois valeurs propres distinctes, on obtient un ensemble de trois cercles appelé tri cercle de Mohr.

14.

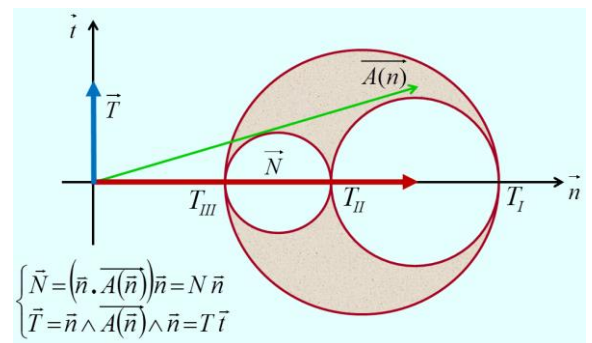
On démontre que si le vecteur normal n'appartient à aucun des plans principaux, l'extrémité du vecteur image est à l'intérieur du tricerclle de Mohr.

Les projections du vecteur image sur les vecteurs de base du plan de Mohr nous donnent le vecteur normal et le vecteur tangent.

15.

Avec cette figure, on constate que la plus grande valeur du vecteur normal est égale à la valeur propre la plus grande, la plus petite valeur est celle de la valeur propre la plus faible.

Enfin la plus grande valeur du vecteur tangent est égale au rayon du plus grand des cercles, soit la demi différence entre la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre.



16.

Dans cette leçon, nous avons vu comment, en partant d'une représentation d'un tenseur de second ordre sous forme d'une matrice diagonale donnant les valeurs propres dans les directions principales, nous pouvons associer à notre application tensorielle deux représentations graphiques. L'une conduit à une forme tridimensionnelle appelée ellipsoïde de Lamé, l'autre conduit à une forme bidimensionnelle dénommée tri-cercles de Mohr. Dans la leçon suivante, nous allons pouvoir utiliser les cercles de Mohr pour le tenseur quadratique associé à une section plane.

1-3 DESCRIPTIONS

Applications

1.

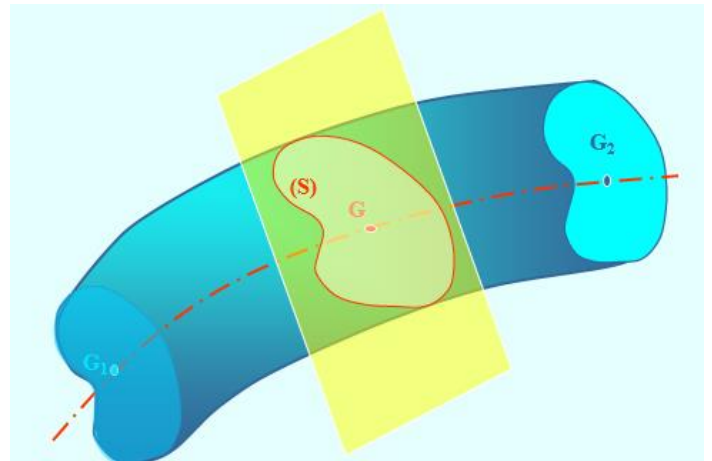
Avec cette présentation, nous allons, sous forme d'exercice mettre en application la notion de repère et voir comment la représentation de Mohr permet dans certains cas d'obtenir graphiquement les valeurs propres et les vecteurs propres d'un tenseur du second ordre. Pour cela nous allons utiliser les propriétés caractéristiques d'une section plane.

2.

Parmi les solides déformables que nous pourrions étudier ultérieurement, les poutres vont jouer un rôle particulier. Géométriquement elles se présenteront sous forme d'un domaine tridimensionnel mais l'une des dimensions est plus grande que les deux autres.

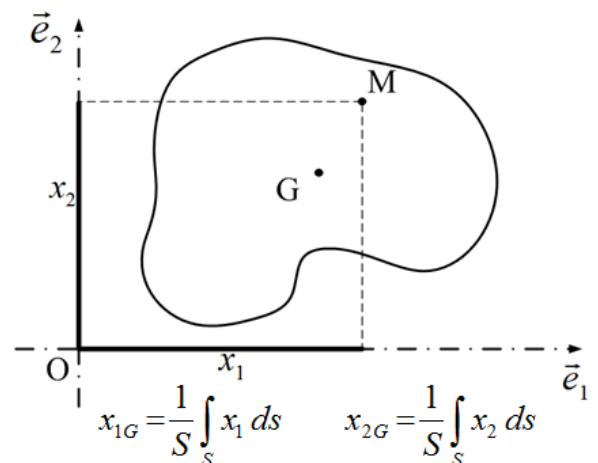
Concrètement, pour générer ce domaine, il faut se donner une forme géométrique dans un plan. A cette forme nous associerons son isobarycentre G .

Puis en promenant l'ensemble le long d'une courbe dans l'espace, on décrira notre poutre délimitée par une section origine et une section extrémité.



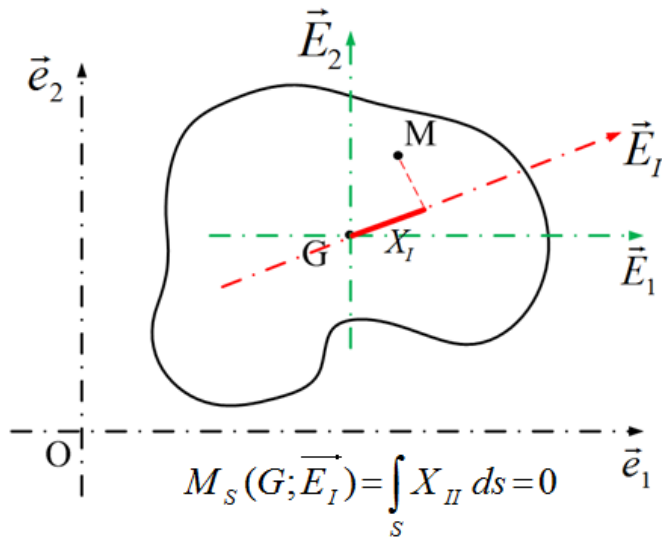
3.

En se plaçant dans le plan de définition de notre section déterminée par son contour, il convient de positionner l'isobarycentre. Ce dernier est défini par une intégrale portant sur toute la section avec l'élément de surface pour variable et le vecteur position pour intégrande. Cette définition permet d'obtenir notre isobarycentre de façon intrinsèque à la surface c'est-à-dire dans son référentiel, mais dans la pratique il sera nécessaire d'utiliser un repère avec une origine O et des axes. En utilisant la relation de Chasle, on peut facilement déterminer le vecteur position de l'isobarycentre dans ce repère. Le vecteur position d'un point M courant de notre section plane est connu dans ce repère par ses composantes. A partir de ces vecteurs, on peut écrire les coordonnées scalaires de positionnement de l'isobarycentre dans le repère.



4.

Les grandeurs intégrales que nous venons d'obtenir représentent les deux moments statiques de notre section plane dans le repère d'origine O. Ces moments statiques sont associés aux vecteurs de base, mais aussi au point origine du repère.



En changeant simplement d'origine, on obtient de nouvelles valeurs. Il est à noter que si l'on fait le calcul en prenant l'isobarycentre comme origine, le moment statique est nul.

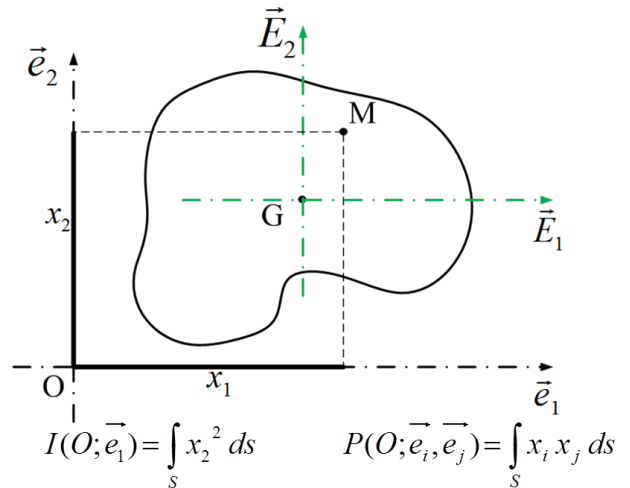
Le plus remarquable est que ce résultat est valable quel que soit l'orientation de l'axe passant par l'isobarycentre. On peut définir l'isobarycentre en disant que c'est le point du plan pour lequel tous les moments statiques sont nuls.

5.

Dans l'étude de la déformation des poutres, il sera aussi nécessaire d'utiliser les notions de moments quadratiques qui sont des intégrales du même type, l'intégrante étant des distances élevées au carré.

$$I(O; \vec{e}_1) = \int_S x_2^2 ds$$

Et l'on utilisera aussi les produits quadratiques, intégrales obtenues avec le produit des coordonnées comme intégrante. Il est à noter que pour une section plane symétrique par rapport à l'un des axes, le produit quadratique est nul. $P(O; \vec{e}_i, \vec{e}_j) = \int_S x_i x_j ds$



6.

A partir des résultats précédents, il est possible d'envisager un changement de repère obtenu par simple changement d'origine. Connaissant le moment quadratique pour un axe passant par une origine O quelconque, on veut calculer le moment quadratique pour la même orientation d'axe mais passant par l'isobarycentre.

Pour cela, il suffit d'utiliser les formules de changement de repère par translation. $x_i = x_{iG} + X_i$

Il suffit alors de développer le calcul d'intégrale. Dans le dernier membre de l'égalité, la première intégrale nous donne l'aire de notre section plane, la seconde représentant un moment statique pour un axe passant par l'isobarycentre est nulle, et enfin la troisième représente le moment quadratique pour l'axe passant par l'isobarycentre.

Au final, on obtient une formule traduisant le théorème de changement d'origine dit de Huygens. Attention, cette formule n'est valable que si le second point est l'isobarycentre. Elle ne peut pas être utilisée directement entre deux points quelconques du plan. Avec cette relation de Huygens, on constate que, pour une direction donnée, le moment quadratique sera minimal pour l'axe passant par l'isobarycentre.

$$I(O; \vec{e}_1) = x_{2G}^2 S + I(G; \vec{e}_1)$$

Après un changement de repère par translation on peut s'interroger sur les relations existantes dans le cas d'un changement de repère par rotation. Nous allons faire l'application en prenant l'isobarycentre pour origine des deux repères.

On écrit le vecteur position dans les deux repères. Pour avoir les relations de changement de coordonnée, il faut appliquer les formules de changement sur les vecteurs de base.

En nous pouvons ainsi exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.

$$\begin{cases} X_I = X_1 \cos \alpha + X_2 \sin \alpha \\ X_{II} = -X_1 \sin \alpha + X_2 \cos \alpha \end{cases}$$

Relations très utiles pour exprimer les moments quadratiques et le produit quadratique du nouveau repère en fonction des anciennes coordonnées. Ce qui nous permet de relier les moments quadratiques et produits quadratiques entre eux.

$$\begin{aligned} I(G; \vec{E}_I) &= (\cos \alpha)^2 I(G; \vec{E}_1) - 2 \cos \alpha \sin \alpha P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2) + (\sin \alpha)^2 I(G; \vec{E}_2) \\ P(G; \vec{E}_I, \vec{E}_{II}) &= \cos \alpha \sin \alpha (I(G; \vec{E}_1) - I(G; \vec{E}_2)) + [(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2] P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2) \end{aligned}$$

8.

Les relations précédentes peuvent être avantageusement résumées avec une formulation matricielle avec des notations abrégées évidentes.

$$\begin{pmatrix} I_I & -P_{I,II} \\ -P_{I,II} & I_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -P_{1,2} \\ -P_{1,2} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

On voit ainsi apparaître une application tensorielle du second ordre représentée par le tenseur quadratique qui admet différents représentants selon la base d'étude.

$$\overline{\overline{I(G)}} = \begin{pmatrix} I_I & -P_{I,II} \\ -P_{I,II} & I_{II} \end{pmatrix} (\vec{E}_I, \vec{E}_{II}) = \begin{pmatrix} I_1 & -P_{1,2} \\ -P_{1,2} & I_2 \end{pmatrix} (\vec{E}_1, \vec{E}_2)$$

Par changement de base, on peut obtenir un représentant matriciel diagonal.

$$\overline{\overline{I(G)}} = \begin{pmatrix} I_I & 0 \\ 0 & I_{II} \end{pmatrix} (\vec{N}_I, \vec{N}_{II})$$

Pour connaître les vecteurs propres et directions principales il suffit d'annuler l'expression donnant le produit quadratique en fonction de l'angle de changement de base.

$$\begin{aligned} P(G; \vec{E}_I, \vec{E}_{II}) &= \cos \alpha \sin \alpha (I(G; \vec{E}_1) - I(G; \vec{E}_2)) + [(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2] P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2) \\ P(G; \vec{E}_I, \vec{E}_{II}) &= \frac{\sin 2\alpha}{2} (I(G; \vec{E}_1) - I(G; \vec{E}_2)) + \cos 2\alpha P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2) \end{aligned}$$

Après être passé par l'angle double, on peut obtenir le positionnement des vecteurs propres.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2)}{I(G; \vec{E}_1) - I(G; \vec{E}_2)}$$

9.

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Campus de CLUNY

Il est possible de retrouver ce résultat à partir de la représentation graphique de Mohr. Pour cela on va considérer le représentant matriciel du tenseur dans la base initiale.

$$\overline{\overline{I(G)}} = \begin{pmatrix} I_1 & -P_{1,2} \\ -P_{1,2} & I_2 \end{pmatrix} (\overline{E_1}, \overline{E_2})$$

Avec cette expression tensorielle, on peut calculer les vecteurs images de nos deux vecteurs de bases.

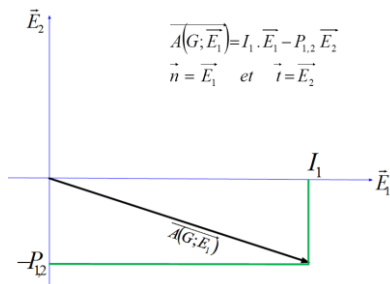
$$\overline{A(G; \overline{E_i})} = \overline{\overline{I(G)}} \cdot \overline{E_i}$$

Pour faire le calcul, il faut que le représentant matriciel du tenseur et le représentant matriciel du vecteur soient exprimés dans la même base.

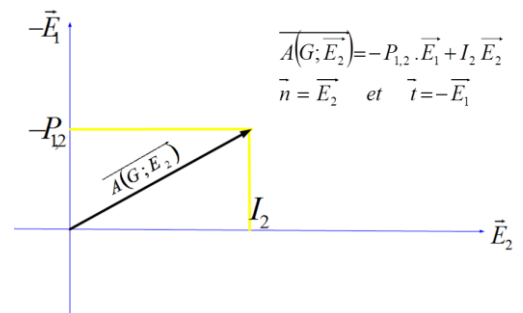
$$\overline{A(G; \overline{E_1})} = I_1 \cdot \overline{E_1} - P_{1,2} \overline{E_2}$$

Pour représenter graphiquement ces vecteurs nous allons nous placer dans le plan de Mohr déterminé par le vecteur normal et le vecteur tangent.

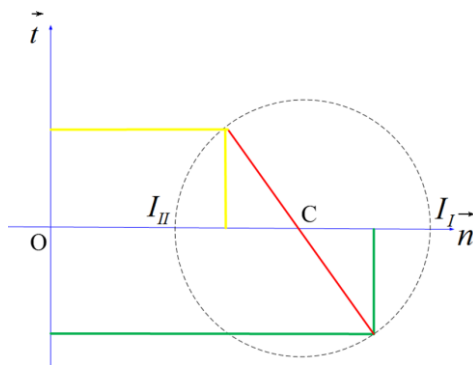
$$\overline{A(G; \overline{E_2})} = -P_{1,2} \cdot \overline{E_1} + I_2 \overline{E_2}$$



Dans le cas du vecteur image du premier vecteur de base, le vecteur normal est justement ce vecteur de base. Tout naturellement nous prendrons le deuxième vecteur de base pour le vecteur tangent ce qui nous permet de dessiner le vecteur image dans le plan de Mohr.



Pour le vecteur image du deuxième vecteur de base, il faut faire une rotation de 90° de la base précédente pour que le vecteur normal du plan de Mohr soit porté par le deuxième vecteur de la base. De fait le premier vecteur de la base est opposé au vecteur tangent.



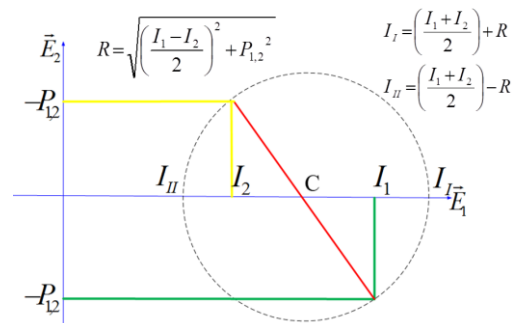
Les extrémités des deux vecteurs images nous donnent deux points qui se trouvent sur le cercle de Mohr. Pour obtenir le centre de ce dernier, il faut trouver l'intersection de la médiatrice des deux points avec l'axe horizontal du repère car le centre est situé à égale distance des deux points et sur l'axe normal. Mais en fait on constate que ce centre est aussi le milieu des points dans le cas de notre exemple.

On peut tracer le cercle de Mohr qui par intersection avec l'axe normal nous donne les deux valeurs propres.

10.

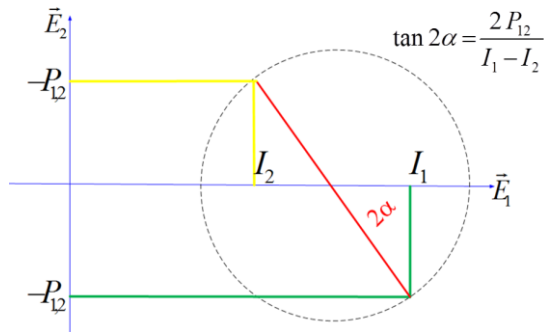
Pour obtenir ces dernières, il faut, en utilisant le théorème de Pythagore, calculer le rayon du cercle.

Les valeurs propres sont égales à la distance positionnant le centre du cercle de Mohr à laquelle on ajoute ou on retranche la valeur du rayon.

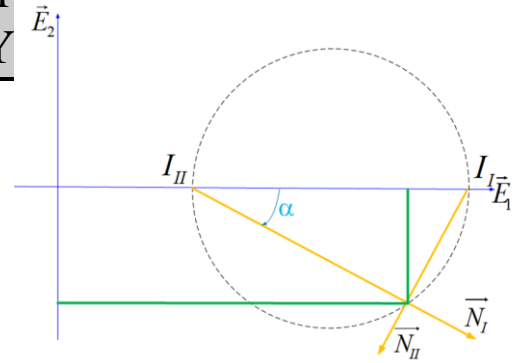


Enfin nous avons vu que si l'on traçait la droite passant par le point de valeur propre minimale et le point courant du cercle associé par exemple au premier vecteur de base, on obtenait dans notre base une direction portée par le vecteur propre maximal.

Et de façon duale, la droite qui passe par le point de valeur propre maximale et le point courant nous donne une direction portée par le vecteur propre minimal.

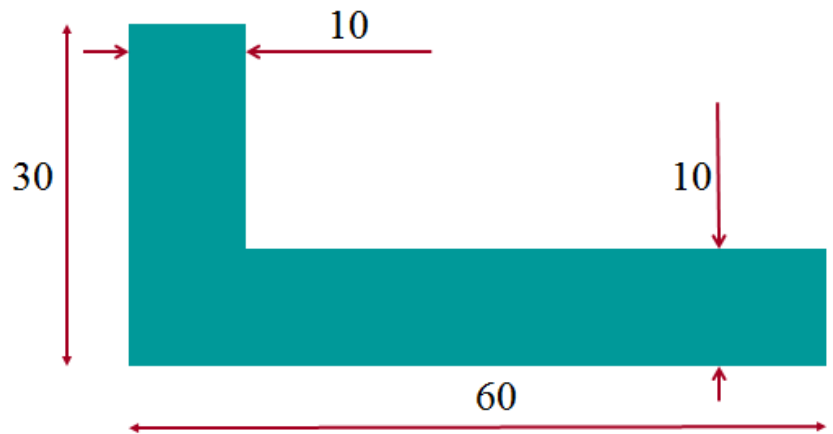


Avec cette dernière figure reprenant les résultats précédents, on peut obtenir facilement le double de l'angle formé entre les vecteurs de base et les vecteurs propres.



11.

En relation de ce qui vient d'être fait, l'auditeur est invité à positionner le barycentre et à définir les valeurs propres et vecteurs propres pour la section plane représentée.



12.

En conclusion, avec cette application sur les grandeurs caractéristique d'une surface plane, nous avons pu constater l'intérêt de définir plusieurs repères pour décrire un même objet. Nous avons travaillé avec la notion de tenseur du second ordre dans un espace vectoriel à deux dimensions. Enfin la construction graphique à partir du cercle de Mohr nous a été utile pour obtenir aussi bien les valeurs propres que les vecteurs propres de notre application tensorielle.