Mécanique des solides déformables

Auteur
Michel MAYA

1 – Descriptions

2 – Représentations graphiques

1-2
DESCRIPTIONS

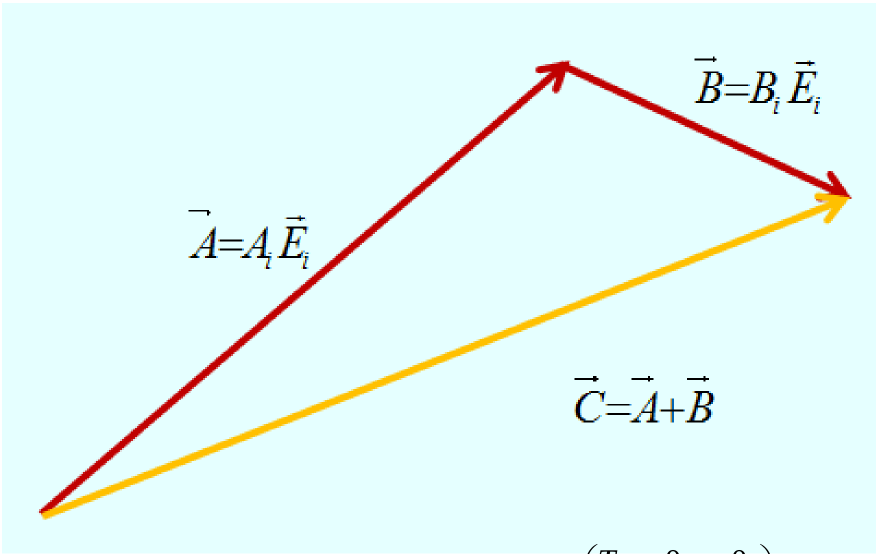
Représentations graphiques

1.

Ainsi que nous le constaterons ultérieurement, nous ferons beaucoup usage d'entités mathématiques dénommées tenseurs symétriques du second ordre. Les différentes composantes de ces tenseurs dans une base tridimensionnelle se présenteront sous forme d'une matrice carrée d'ordre 3 symétrique. Cette notion étant nouvelle pour beaucoup d'entre vous, il est nécessaire d'en donner des représentations graphiques pour aider à sa compréhension.

2.

Concrètement, c'est ce que nous avons fait lorsque nous avons associé un vecteur avec origine, intensité, direction et sens à une forme rectiligne terminée par une flèche.



Le vecteur étant en fait un tenseur du premier ordre, nous avons établi une bijection avec un élément graphique.

Cela nous a permis d'assimiler plus facilement la notion d'addition de ces vecteurs.

3.

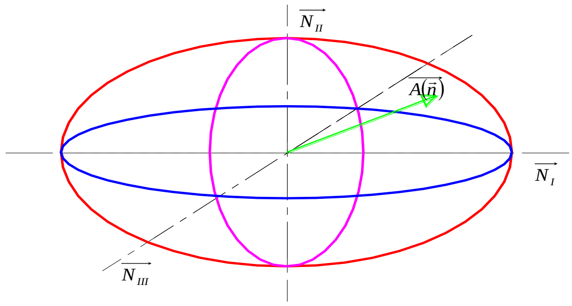
Un tenseur du second ordre peut être donné par son représentant dans la base des vecteurs propres, ce représentant étant alors une matrice diagonale. Il est à noter que la base des vecteurs propres représente ce que l'on appellera les directions principales.

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix}\left(\vec{N}_i\right)$$

Par l'intermédiaire de cette application tensorielle, à chaque vecteur unitaire de l'espace $\vec{n}=n_i\,\vec{N}_i$, on peut associer un vecteur image $\overrightarrow{A(\vec{n})}=\mathbf{T}\vec{n}$ dont il est possible de calculer aisément les composantes dans la base des vecteurs propres. $\overrightarrow{A(\vec{n})}=A_i\,\vec{N}_i$ et $\begin{cases} A_1=T_I\,n_1 \\ A_2=T_{II}\,n_2 \\ A_3=T_{III}\,n_3 \end{cases}$

En prenant initialement un vecteur unitaire, on constate alors qu'il existe une relation entre les composantes du vecteur image $n_1{}^2+n_2{}^2+n_3{}^2=1=\dfrac{A_1{}^2}{T_I{}^2}+\dfrac{A_2{}^2}{T_{II}{}^2}+\dfrac{A_3{}^2}{T_{III}{}^2}$.

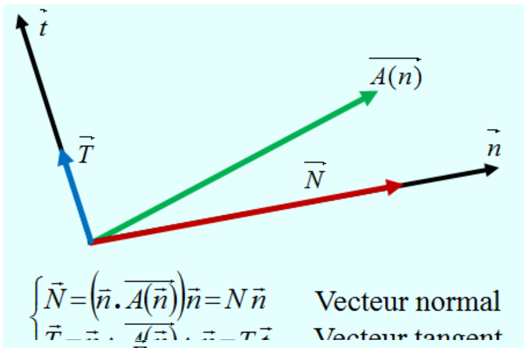
Avec cette relation, en considérant que les composantes du vecteur A représentent les coordonnées d'un point de l'espace, on constate que tous les points possibles se trouvent sur un ellipsoïde appelé ellipsoïde de Lamé.



Cette première représentation graphique tridimensionnelle permet de constater que les valeurs propres représentent les valeurs extrêmales de l'état tensoriel.

4.

Nous allons nous placer dans le plan formé par le vecteur unitaire d'étude et son vecteur image par l'application tensorielle.



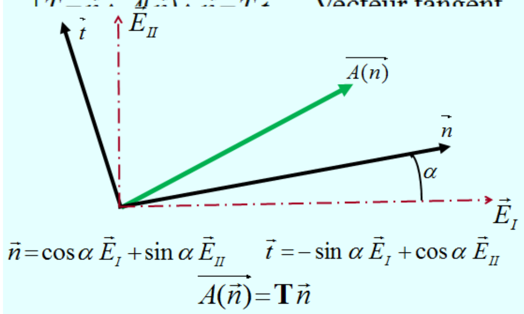
On désigne par N la projection du vecteur image sur le vecteur d'étude.

La projection du vecteur image sur le plan orthogonal au vecteur d'étude nous donne un vecteur, appelé vecteur tangent, pour lequel nous pouvons associer un vecteur unitaire.

5.

On considère un vecteur unitaire appartenant à un plan principal et formant un angle alpha avec une direction principale.

On peut calculer et définir son image par l'application tensorielle.



6.

Il est possible de donner les composantes de ce vecteur image dans la base des vecteurs propres.

$$\overrightarrow{A(n)} = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 = T_I \cos\alpha \\ A_2 = T_{II} \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\left(\vec{E}_i\right)}$$

7.

La construction graphique animée nous montre comment on peut construire pas à pas l'ellipse de Lamé. On commence par construire l'extrémité du vecteur image associé à un vecteur unitaire n appartenant à un plan principal. Puis, en faisant varier progressivement l'angle entre la direction principale et le vecteur unitaire normal, et en recommençant la construction, on constate que l'extrémité du vecteur image décrit une ellipse. On remarquera que pour cette représentation, les vecteurs propres gardent une direction fixe vis-à-vis de l'observateur.

8.

Afin de conforter nos connaissances sur les représentations graphiques, nous allons utiliser un module interactif du projet d'enseignement MECAGORA (http://www.mmaya.fr/Static/index.html).

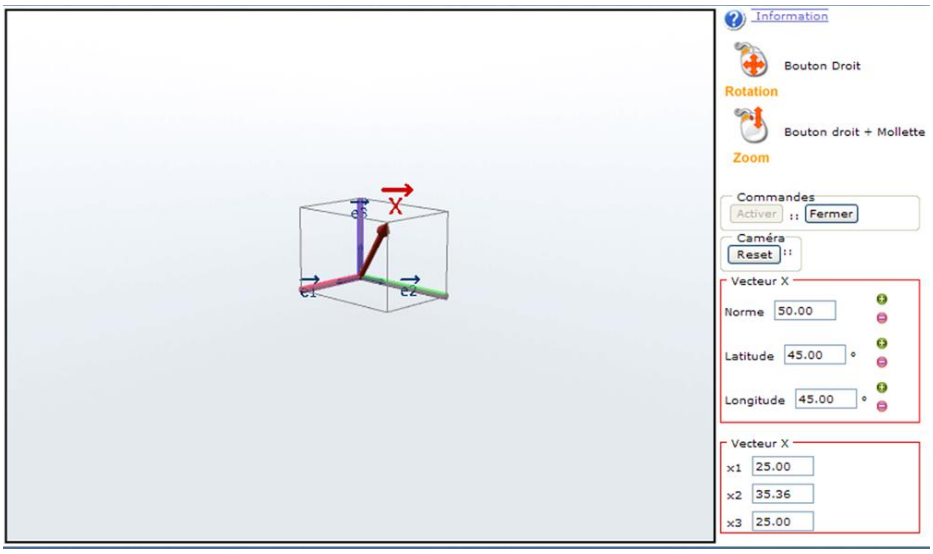
Le mode d'emploi de la souris est disponible à tout instant en cliquant sur le menu Information.

Un écran classique se compose de différentes fenêtres.

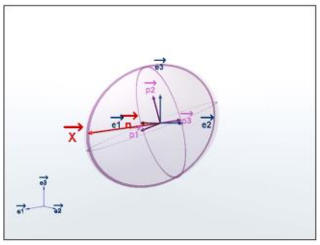
Une fenêtre de visualisation graphique contient des objets en 3 Dimensions que l'on peut déplacer de façon interactive avec la souris.

Une fenêtre de commande dans laquelle il est possible d'agir sur des valeurs de paramètres.

Et une fenêtre de résultats contenant les valeurs numériques de certaines grandeurs calculées.



9.
Dans le projet Mécagora, le module ia4 (http://mecagora.free.fr/modules/m9/html/animation_ia4.htm) permet d'avoir une représentation de l'ellipsoïde de Lamé en fonction des valeurs données à l'application tensorielle.



10.
Avec les formules de changement de base on peut donner les nouvelles composantes dans la base formée par le vecteur normal et le vecteur qui lui est orthogonal et que nous appellerons vecteur tangent :
$\overrightarrow{A(\vec{n})} = A_1 \vec{E}_I + A_2 \vec{E}_{II} = a_n \vec{n} + a_t \vec{t}$

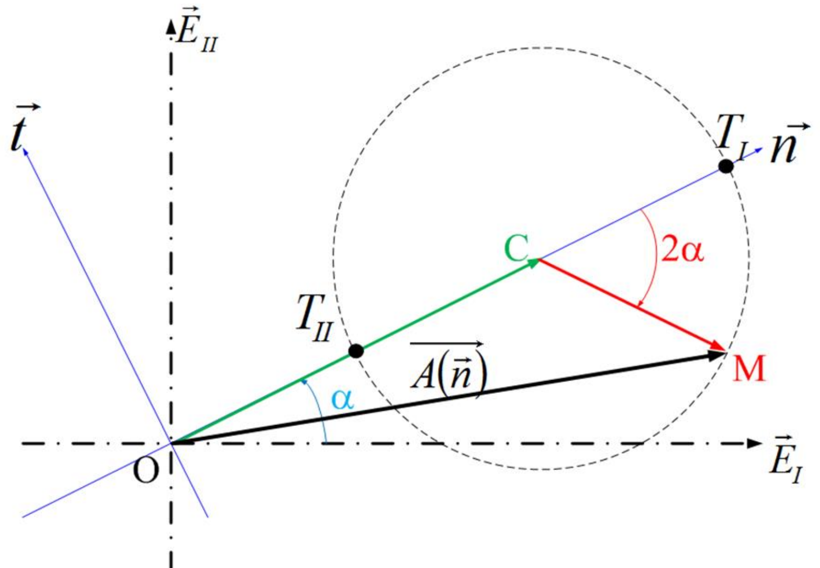
Et les formules de trigonométrie permettent de passer à l'angle double.

$$\begin{cases} a_n = T_I \cos^2 \alpha + T_{II} \sin^2 \alpha = \dfrac{T_I + T_{II}}{2} + \dfrac{T_I - T_{II}}{2} \cos(-2\alpha) \\ a_t = (T_{II} - T_I) \cos\alpha \sin\alpha = \dfrac{T_I - T_{II}}{2} \sin(-2\alpha) \end{cases}$$

11.
Commençons par positionner un repère plan avec une origine O et la base constituée par les vecteurs propres.

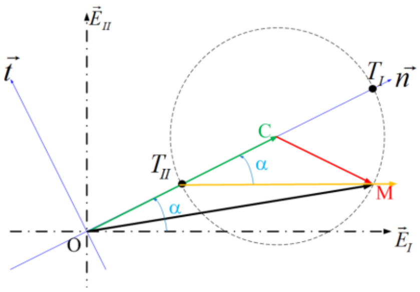
Dans ce plan on peut positionner les vecteurs n et t dont le positionnement angulaire est donné par l'angle alpha.

Sur l'axe normal, on peut repérer les deux points aux distances définies par les deux valeurs propres TI et TII et le milieu C.



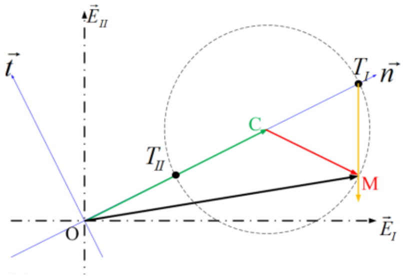
On peut maintenant représenter le vecteur CM de module $(T_I - T_{II})/2$ et formant un angle -2a avec l'axe normal

Le vecteur image A(n) étant la somme vectorielle des deux vecteurs précédents, on constate sans problème que lorsque l'angle alpha varie, le point M décrit un cercle dit de Mohr dans le repère tournant associé aux vecteurs n et t.



A partir de cette construction, on constate que lorsque que l'on trace une droite joignant le point à valeur propre minimale T_{II} au point courant du cercle M associé à notre vecteur normal n, on obtient un angle alpha avec cette normale. Cette droite est parallèle à la direction du vecteur propre maximal E_I.

Et de façon duale, la droite qui joint le point à valeur propre maximale T_I au point courant M nous donne une direction parallèle au vecteur propre minimal E_{II}. On voit que le cercle de Mohr contient de façon intrinsèque des indications sur les vecteurs propres de notre application tensorielle.



12.

Comme pour l'ellipse de Lamé, ce cercle peut être obtenu en faisant varier progressivement l'angle entre la direction principale et le vecteur unitaire normal. En faisant une construction pas à pas, on constate que le point extrémité du vecteur image décrit un cercle dans le repère associé au vecteur normal et au vecteur tangent. Mais, contrairement à la construction de l'ellipse de Lamé, les directions principales sont en mouvement par rapport à l'observateur. En général, on représente le cercle de Mohr en plaçant l'axe normal n horizontal.

13.

Le plan contenant le vecteur unitaire normal et son vecteur image sera appelé le plan de Mohr.

Si le vecteur unitaire normal appartient à un plan principal, l'extrémité du vecteur image est situé sur un cercle dont le centre est sur l'axe normal et dont les points intersections avec l'axe normal ont des abscisses égales aux valeurs propres associées aux vecteurs propres du plan principal.

Comme nous avons en général trois valeurs propres distinctes, on obtient un ensemble de trois cercles appelé tri cercle de Mohr.

14.

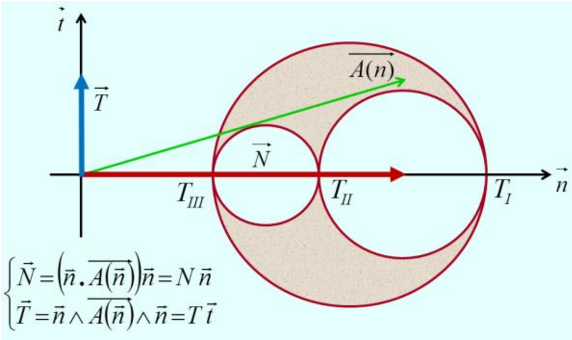
On démontre que si le vecteur normal n'appartient à aucun des plans principaux, l'extrémité du vecteur image est à l'intérieur du tricercle de Mohr.

Les projections du vecteur image sur les vecteurs de base du plan de Mohr nous donnent le vecteur normal et le vecteur tangent.

15.

Avec cette figure, on constate que la plus grande valeur du vecteur normal est égale à la valeur propre la plus grande, la plus petite valeur est celle de la valeur propre la plus faible.

Enfin la plus grande valeur du vecteur tangent est égale au rayon du plus grand des cercles, soit la demi différence entre la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre.



16.

Dans cette leçon, nous avons vu comment, en partant d'une représentation d'un tenseur de second ordre sous forme d'une matrice diagonale donnant les valeurs propres dans les directions principales, nous pouvions associer à notre application tensorielle deux représentations graphiques. L'une conduit à une forme tridimensionnelle appelée ellipsoïde de Lamé, l'autre conduit à une forme bidimensionnelle dénommée tri-cercles de Mohr.