



Vidéo 14 : MODELES DE PORTEFEUILLE – Corrélations de crédit

Bonjour.

Aujourd'hui, nous allons parler des modèles de portefeuille de crédit, et en particulier de la notion de corrélation.

[Slide modeling portfolio risk]

L'approche généralement retenue par les établissements bancaires pour modéliser le risque de crédit se décompose en trois étapes :

- Premièrement, estimer les risques ligne à ligne (PD, LGD et EAD) ;
- Deuxièmement, estimer les corrélations et dépendances entre les défauts ;
- Enfin, troisièmement, calculer la distribution des pertes pour le portefeuille tout entier et déterminer la contribution de chaque ligne au risque total.

Si tous les risques attachés aux différentes transactions d'un portefeuille de crédit étaient indépendants les uns des autres, alors les effets de la diversification du risque rendraient les pertes peu dispersées autour de la perte attendue. Les effets de corrélation entre les défauts induisent une variabilité du niveau des pertes importantes et accroissent le risque d'avoir des pertes élevées sur le portefeuille.

[Slide default correlation]

Afin d'illustrer le rôle des corrélations, appelons A et B les deux événements correspondant au défaut de deux émetteurs de dette. Si p_A et p_B sont les probabilités de défaut respectives de ces deux émetteurs, et si p_{AB} est leur probabilité de défaut joint, alors nous avons $p_{AB} = p_A \cdot p_B$ dans le cas où les défauts sont indépendants. Le coefficient de corrélation est un indicateur de la dépendance entre les défauts des deux émetteurs :

$$\rho_{AB} = \frac{p_{AB} - p_A \cdot p_B}{\sqrt{p_A(1-p_A)} \sqrt{p_B(1-p_B)}}$$

Ainsi, la probabilité jointe est égale à :

$$p_{AB} = p_A p_B + \rho_{AB} \sqrt{p_A(1-p_A)} \sqrt{p_B(1-p_B)}$$

Pour fixer les ordres de grandeur, supposons $p_A = p_B = 1\%$. Si la corrélation des défauts de A et de B est nulle, la probabilité jointe de défaut de A et de B est égale au produit $p_A \cdot p_B$, égal à 0.01%. Si en revanche la corrélation des défauts de A et de B, ρ_{AB} , est égale à 10 %, nous obtenons p_{AB} environ égal à 0,1 % qui est une valeur 10fois supérieure à la valeur que nous aurions obtenue dans le cas de défauts indépendants. Ainsi, la corrélation est le principal facteur explicatif des défauts multiples dans un portefeuille.

[slide k defaults among n assets]

Dans le cas d'un portefeuille homogène de n actifs indépendants ayant la même probabilité de défaut p , nous pouvons calculer la loi statistique des défauts. En effet, la probabilité d'avoir k défauts parmi n actifs suit la loi binomiale, comme indiqué par la formule ci-contre.

Le Risque de crédit Bancaire – Cours en ligne



Dans l'autre cas extrême où la dépendance entre les défauts est parfaite (corrélation égale à 100%), alors soit tous les actifs font défaut simultanément (avec probabilité p), soit aucun actif ne fait défaut (avec probabilité $1-p$). Dans ce cas, la distribution des pertes du portefeuille est une variable de Bernoulli de paramètre p . Un modèle à un facteur est un modèle possible pour interpoler entre ces deux cas extrêmes, c'est-à-dire pour introduire de la corrélation entre les défauts.

Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y de densité $f_Y(y)$ telle que la probabilité de défaut des actifs du portefeuille soit une fonction $p(Y)$ de cette variable. Nous donnerons une interprétation économique de ce modèle dans le prochain paragraphe. Conditionnellement à la réalisation de la variable Y , les défauts du portefeuille sont indépendants entre eux. La loi conditionnelle du nombre de défauts sur le portefeuille est donc donnée par la deuxième relation ci-contre.

La loi inconditionnelle du nombre de défauts s'obtient donc par intégration sur l'ensemble des valeurs possibles de la variable Y , donnée par la troisième relation ci-contre.

Nous illustrons la notion de dépendance sur l'exemple de deux variables aléatoires normales centrées réduites.

Dans ce qui suit, nous ne détaillerons pas la théorie générale des copules qui est le cadre conceptuel d'étude de la notion de dépendance. Il faut simplement retenir que deux variables aléatoires peuvent avoir des structures de dépendance très variées, en ayant des lois marginales qui ne changent pas.

[slide nuages de points dépendance structures]

Le graphique ci-contre représente des nuages de points, c'est-à-dire des réalisations de deux variables aléatoires normales centrées réduites dont la structure de dépendance suit la copule gaussienne sur le graphe de gauche et la copule de Student sur le graphe de droite.

Nous constatons que les occurrences d'événements extrêmes simultanés sur les deux variables sont plus fréquentes pour la copule de Student que pour la copule gaussienne.

Illustrons à présent une méthode de corréler les défauts telle qu'utilisée par les banques et les agences de notation pour modéliser les risques des portefeuilles de crédit.

[Slide Asset correlation]

Considérons un portefeuille de crédit de n lignes équipondérées. Sur un horizon de temps d'une période (un an par exemple), nous modélisons le défaut de la ligne i à l'aide d'une variable R_i normale centrée réduite ; l'évènement de défaut est décrit par une variable de Bernoulli :

$D_i =$ indicatrice que $R_i \leq -s_i$

La valeur de s_i est le seuil de déclenchement du défaut. La probabilité de défaut associée à la ligne i est donc par définition $P(R_i \text{ inférieur ou égal à } -s_i) = N(-s_i)$.

Dans un cas réaliste, les défauts sont corrélés, et une manière de modéliser cela consiste à introduire la dépendance sur les variables R_i

que nous interprétons, ainsi que nous l'avons dans un chapitre précédent, comme le rendement des actifs de l'entreprise i dans le modèle de Merton. Nous considérons un portefeuille homogène, dans lequel tous les actifs ont la même probabilité de défaut ($s_i = s$ pour tout i), et toutes les corrélations

Le Risque de crédit Bancaire – Cours en ligne



des rendements d'actifs R_i deux à deux sont égales à $\text{corr}(R_i; R_j) = \rho$. Si nous introduisons $n + 1$ variables aléatoires normales centrées réduites F et ϵ_i ($i =$ allant de 1 à n), toutes indépendantes deux à deux, nous pouvons poser :

$$R_i = \rho F + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_i$$

Les variables R_i forment un vecteur gaussien centré réduit multivarié. Le facteur F s'interprète comme un facteur de risque systémique décrivant l'état de l'économie, commun à tous les émetteurs du portefeuille. Les facteurs ϵ_i sont les facteurs spécifiques à chaque ligne. Le paramètre de corrélation apparaît comme un facteur de sensibilité à la conjoncture économique.

[Slides What have we learnt ?]

En résumé, qu'avons-nous appris ?

- La modélisation des risques de crédit au sein d'un portefeuille repose sur une évaluation des corrélations et des dépendances
- La corrélation est liée à la loi jointe des défauts (en référence à la théorie des copules). Selon la structure de dépendance choisie, les événements extrêmes simultanés sont plus ou moins probables
- Dans le modèle homogène à un facteur, le rendement d'actif d'une entreprise est une combinaison linéaire entre un facteur macroéconomique, appelé facteur systémique, et un facteur spécifique