MOOC (Astro)Physique I : Électromagnétisme

J.M. Malherbe*

Automne 2016

Cours

ELM-A Électromagnétisme

ELM-A.1 Force de Lorentz subie par une charge dans un champ électrique et dans un champ magnétique

Une particule de charge q mobile, de vitesse $\vec{v}$, plongée dans un champ électrique $\vec{E}$ et dans un champ magnétique $\vec{B}$, subit la force de Lorentz :

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

$q\vec{E}$ est une force électrique, colinéaire au champ électrique $\vec{E}$.
$q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est une force magnétique, orthogonale à la fois à la vitesse $\vec{v}$ de la charge et au champ magnétique $\vec{B}$.

Unités :
- $\vec{E}$ se mesure en Volts/m
- $\vec{B}$ en Tesla (T)
- q en Coulomb (C)
- $\vec{v}$ en m/s

Rappel : Charge élémentaire : $e = 1.6 * 10^{-19}\,C$; le proton a la charge $+e$, l'électron la charge $-e$.

ELM-A.2 Travail de la force de Lorentz et énergie mécanique

Le travail élémentaire est

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

où $\overrightarrow{dOM}$ est un déplacement élémentaire de la charge située en M, l'origine du repère étant en O.
La vitesse $\vec{v}$ est reliée à $\overrightarrow{dOM}$ par $\vec{v} = \overrightarrow{dOM}/dt$, on obtient donc

$$\begin{aligned} dW &= q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\overrightarrow{dOM} \\ &= q\vec{E} \cdot \vec{v}dt + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}\,dt \end{aligned}$$

Or $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ car $(\vec{v} \wedge \vec{B})$ est un vecteur orthogonal au vecteur vitesse $\vec{v}$.
Donc

$$dW = q\vec{E} \cdot \vec{v}\,dt$$

La puissance de la force de Lorentz est

$$\boxed{\mathcal{P} = q\vec{E} \cdot \vec{v}} \qquad \text{(Watts)}$$

<u>La force magnétique ne travaille pas ; sa puissance est nulle ; seule la force électrique travaille.</u>

Si m désigne la masse de la particule de charge q, le principe fondamental de la dynamique implique

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Effectuons le produit scalaire avec $\vec{v}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\frac{1}{2}m\vec{v}^2}{dt} &= q\vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= q\vec{E} \cdot \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} \end{aligned}$$

d'où

$$d\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Si $\vec{E}$ dérive du potentiel électrostatique V, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, donc

$$\begin{aligned} d\frac{1}{2}m\vec{v}^2 &= -q\,\overrightarrow{grad}(V) \cdot \overrightarrow{dOM} \\ &= -q\,dV \end{aligned}$$

car par définition $dV = \overrightarrow{grad}(V) \cdot \overrightarrow{dOM}$

Nous pouvons en conclure que la quantité $\boxed{\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + qV}$ est conservée. C'est l'énergie mécanique de la particule chargée. Elle se décompose en deux parties :
l'énergie cinétique $\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2}$ et l'énergie potentielle $\boxed{E_p = q\,V}$.

ELM-A.3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et constant

Supposons qu'une particule ponctuelle de charge q et de masse m soit soumise à la seule force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$, où $\vec{E}$ est invariable dans l'espace et dans le temps.
Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= q\vec{E} \end{aligned}$$

ce qui s'intègre vectoriellement, une première fois pour obtenir la vitesse

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= (q\vec{E}/m)t + \overrightarrow{v_0} \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{v_0}$ est la vitesse initiale de la charge.
Une seconde fois pour obtenir la position

$$OM(t) = (\frac{1}{2}qE/m)t^2 + v_0t + OM_0$$

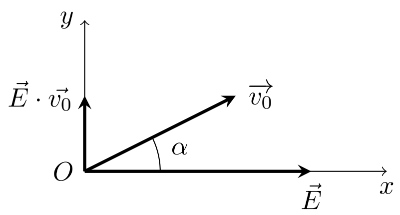
où M_0 est la position initiale de la charge.

Exemple 1 : $\vec{E}$ et $\overrightarrow{v_0}$ sont colinéaires ; la charge a pour abscisse $x(t)$ et pour vitesse v(t) sur un axe Ox ; sa position initiale est l'abscisse x_0.

$v(t) = (qE/m)t + v_0$ et $x(t) = (\frac{1}{2}qE/m)t^2 + v_0t + x_0$

Il s'agit d'un mouvement rectiligne, accéléré ou ralenti.

Exemple 2 : La charge a pour coordonnées $[x(t), y(t)]$ et pour vitesse $[v_x(t), v_y(t)]$ dans le repère (xOy) ; en $t = 0$, elle est au point O et possède la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = [v_0cos(\alpha), v_0sin(\alpha)]$



On a

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= d\overrightarrow{OM}/dt \\ &= (q\vec{E}/m)t + \overrightarrow{v_0} \end{aligned}$$

et

$$OM(t) = (\frac{1}{2}q\vec{E}/m)t^2 + \vec{v_0}t + \overrightarrow{OM_0}$$

Ces deux équations se projettent sur les axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 cos(\alpha) & \text{mouvement accéléré ou ralenti selon } Oy \\ v_y(t) = (q\vec{E}/m)t + v_0 sin(\alpha) & \text{mouvement à vitesse constante selon } Ox \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 cos(\alpha)t \\ y(t) = (\frac{1}{2}q\vec{E}/m)t^2 + v_0 sin(\alpha)t \end{cases}$$

On peut éliminer le temps t entre les deux équations ; on obtient l'équation de la trajectoire :

$$y = (\frac{1}{2}qE/m)\left(\frac{x}{v_0 cos(\alpha)}\right)^2 + xtan(\alpha)$$

Il s'agit d'une parabole.

Conclusion : Les charges sont accélérées ou ralenties par un champ électrique. L'énergie cinétique de la particule varie.

ELM-A.4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et constant ; pulsation gyromagnétique et rayon de giration

Supposons qu'une particule ponctuelle de charge q et de masse m soit soumise à la seule force magnétique $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$, où $\vec{B}$ est invariable dans l'espace et dans le temps.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le produit scalaire avec $\vec{v}$ donne

$$\begin{aligned} m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)/dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique de la particule est constante. La norme $v = \|\vec{v}\|$ du vecteur vitesse est invariable.

Considérons maintenant la dérivée du produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{B}$ par rapport au temps en supposant que $\vec{B}$ ne varie pas au cours du temps :

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{B})}{dt} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} \\ &= \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $\vec{v} \wedge \vec{B}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.
On en déduit que le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{B}$ est constant.

On peut décomposer le vecteur vitesse $\vec{v}$ en 2 composantes, $\vec{v}_{//}$ dans la direction du champ magnétique et $\vec{v}_\perp$ dans le plan orthogonal au champ tel que $\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_\perp$. On a alors, avec $v = \|\vec{v}\|$, $v_{//} = \|\vec{v}_{//}\|$, $v_\perp = \|\vec{v}_\perp\|$ et $B = \|\vec{B}\|$, :

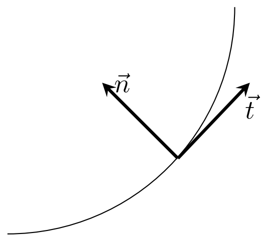
$$\boxed{v^2 = v_{//}^2 + v_\perp^2 = \text{ constante et } v_{//}B = \text{ constante}}$$

Conséquence :

$$\boxed{B = \text{ constante}, v_{//} = \text{ constante et } v_\perp = \text{ constante}}$$

Mouvement dans un champ magnétique de la forme $\vec{B} = B\vec{e_z}$

$\vec{v}_{//}$ est dans la direction Oz du champ magnétique et $\vec{v}_\perp$ dans le plan orthogonal xOy que l'on munit du repère de Frenet $(\vec{t}, \vec{n})$ où $\vec{t}$ est la tangente à la trajectoire et $\vec{n}$ la normale. $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{e_z})$ forment un trièdre orthonormé.



L'équation du mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} m\frac{d\vec{v}}{dt} &= m\frac{d\vec{v}_{//}}{dt} + md\frac{\vec{v}_\perp}{dt} \\ &= q\vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= q\vec{v}_\perp \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Posons $\vec{v}_{//} = v_{//}\vec{e_z}$ et $\vec{v}_\perp = v_\perp \vec{t}$.
On a d'une part :

$$\begin{aligned} \vec{v}_\perp \wedge \vec{B} &= v_\perp \vec{t} \wedge B\vec{e_z} \\ &= -v_\perp B\vec{n} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{dv_\perp}{dt}\vec{t} + \frac{v_\perp d\vec{t}}{dt}$$

Attention : Ne pas confondre t, temps, et $\vec{t}$, vecteur unitaire tangent !

Or $d\vec{t}/dt = (d\vec{t}/ds)(ds/dt)$ où s est l'abscisse curviligne de la charge dans le plan xOy, $v_\perp = ds/dt$ et $d\vec{t}/ds = \vec{n}/R$ où R est le rayon de courbure de la trajectoire.

Donc

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{dv_\perp}{dt}t + (v_\perp^2/R)\vec{n}$$

et $m\frac{dv_{//}}{dt}\vec{e_z} + m\frac{dv_\perp}{dt}\vec{t} + (mv_\perp^2/R)\vec{n} = -qv_\perp B\vec{n}$

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{e_z}, \text{ on obtient } dv_{//}/dt = 0 & \text{d'où } v_{//} = \text{constante} \\ \text{sur } \vec{t}, \text{ on obtient } dv_\perp/dt = 0 & \text{d'où } v_\perp = \text{constante} \\ \text{sur } \vec{n}, \text{ on obtient } mv_\perp^2/R = -qv_\perp B & \text{d'où } R = -mv_\perp/qB\text{rayon de giration} \end{cases}$$

et le vecteur rotation de la charge

$$\boxed{\vec{\Omega} = -(qB/m)\vec{e_z}}$$

L'accélération dans le plan xOy est donnée par $\vec{a}_\perp = d\vec{v}_\perp/dt = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_\perp$ La quantité $\|\vec{\Omega}\| = |qB/m|$ porte le nom de pulsation gyromagnétique.

Si le champ magnétique est uniforme, le rayon de courbure R est uniforme et la trajectoire est un cercle dans le plan xOy. Il est parcouru dans le sens horaire ou antihoraire selon le signe du produit (qB). Dans l'espace, le mouvement est une hélice d'axe parallèle à $\vec{e_z}$ et de pas $h = v_{//}T$ où T est le temps de parcours du cercle égal à $2\pi/\Omega$. Le moment cinétique est constant et vaut $mv_\perp R$.

Conclusion : Les charges sont déviées par un champ magnétique. L'énergie cinétique de la particule ne varie pas.

Application : le phénomène de piégeage de charges par miroir magnétique

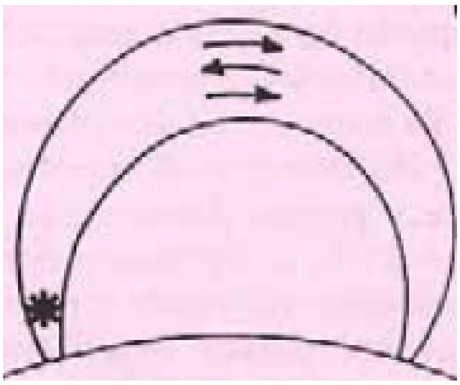


FIGURE 1 – A la surface du Soleil, le phénomène de miroir magnétique se produit lorsqu'une particule chargée se déplace d'une zone de champ magnétique faible (sommet d'une arche magnétique) vers ses pieds d'ancrage où le champ magnétique est fort. La vitesse de dérive $v_{//}$, maximale au sommet de l'arche, diminue vers ses pieds, peut s'annuler et s'inverser.

Le champ magnétique $\vec{B}$ étant à flux conservatif, on peut écrire en première approximation : $BS =$ constante , où S est la section de l'arche. Celle-ci diminue du sommet vers les pieds de l'arche, de sorte que le champ magnétique B augmente.
Cependant, $v_{//}B =$ constante implique que $v_{//}$ diminue du sommet vers les pieds de l'arche.

De $v^2 = v_{//}^2 + v_{\perp}^2 =$ constante, on en déduit que $v_{\perp}$ augmente vers les pieds de l'arche.

Aux ordres de grandeur, en supposant que S est voisin de R^2, rayon de giration, B varie en $1/R^2$ et $v_{//}$ varie en R^2 ; comme $R \to 0$ aux pieds, $v_{//} \to 0$ aux pieds, donc $v_{//}$ peut s'annuler et s'inverser.

Sachant que $R = m\frac{v_{\perp}}{q}B$, on en déduit que $v_{\perp}$ varie en $1/R$, donc $v_{\perp} \to \infty$ aux pieds.