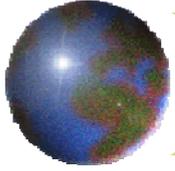


Mécanique des fluides

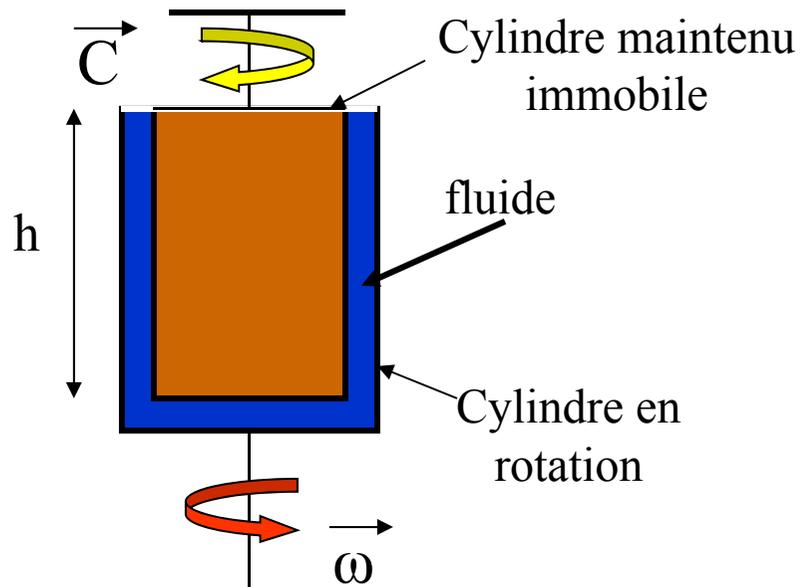
Dynamique des fluides réels



Viscosité des fluides

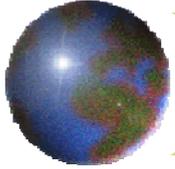
- Mise en évidence : viscosimètre de Couette

Le viscosimètre est constitué de deux cylindres coaxiaux l'un est mis en rotation avec la vitesse angulaire ω . L'autre est entraîné par les forces de viscosité et est maintenu immobile par l'application d'un couple C . L'espace entre les deux cylindres est faible et rempli du fluide dont on veut mesurer la viscosité.



On appelle R_1 et R_2 les rayons des cylindres et e la différence $R_1 - R_2$ est très petit de telle façon que l'on puisse considérer la répartition des vitesses comme linéaire entre les cylindres. On montre que la force de frottement est proportionnelle au gradient de vitesse soit

$$F = \mu \frac{SV}{e}$$



Viscosité des fluides

- **Viscosimètre de Couette**

Le coefficient de proportionnalité μ est appelé viscosité dynamique du fluide et V/e représente le gradient de vitesse en effet une particule de fluide en contact avec une paroi a sa vitesse.

Vitesse d'une particule de fluide en contact avec la paroi mobile : $V = R_1\omega$

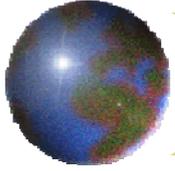
Vitesse de la particule en contact avec la paroi immobile : zéro

Comme la répartition des vitesses est linéaire, le gradient de vitesse est égal à

$$(V-0)/e = V/e.$$

L'expérience de Couette permet la mesure du coefficient de viscosité par la mesure du couple C :

$$C = R_2 S \mu \frac{V}{e} \quad \text{avec} \quad S = 2\pi R_2 h \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{C e}{2\pi R_2^2 R_1 h \omega}$$



Viscosité des fluides

● Dimensions et unités

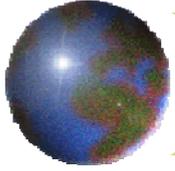
De la relation $\mu = \frac{Fe}{SV}$ on en déduit la dimension de la **viscosité dynamique**

$$[\mu] = \frac{MLT^{-2}L}{L^2LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

L'unité dans le **Système International** est donc le **kg.m⁻¹.s⁻¹**

Vous trouverez également dans la littérature le poiseuille (symbole Pl) tel que **1 Pl = 1 kg.m⁻¹.s⁻¹**

Dans le système CGS (centimètre, gramme, seconde), l'unité est le poise (symbole Po) tel que **10 Po = 1 kg.m⁻¹.s⁻¹**



Viscosité des fluides

● Viscosité cinématique

Nous verrons un peu plus tard qu'il apparaît naturellement dans les calculs la quantité :

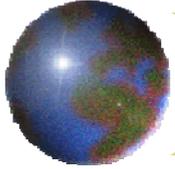
$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Cette quantité, rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique est appelée **viscosité cinématique**

Dimensions : $[\nu] = L^2 T^{-1}$

Unités : **système international : $m^2.s^{-1}$** , **système CGS : le stokes symbole : st**

$$1 \text{ m}^2.s^{-1} = 10^4 \text{ st}$$



Viscosité des fluides

- Variation de la viscosité dynamique avec la température et la pression

Cas des gaz

Influence de la pression $\mu = 0.499 \rho c l$

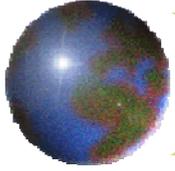
l est le libre parcours moyen, ρ a masse volumique et c la vitesse moyenne des molécules. En général pour les gaz, la pression influe peu sur la viscosité.

Influence de la température

Soit μ_0 la viscosité à la température T_0

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{K \sqrt{T}}{1 + \frac{C}{T}}$$

K et C sont des constantes



Viscosité des fluides

- Variations de la viscosité dynamique avec la pression et la température

Cas des liquides

Influence de la pression

$$\frac{\mu_P}{\mu_{P_0}} = a \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right)$$

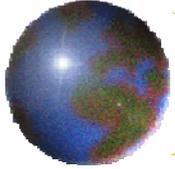
avec μ_P et μ_{P_0} les viscosités aux pressions P et P₀

Pour les huiles minérales, $a = 1.003$

Influence de la température

$$\mu = e^{\left(\frac{T_0}{T} \right)^m \log \mu_0}$$

avec μ_0 la viscosité à la température T₀



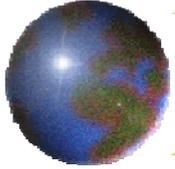
Tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformation

- Tenseur des contraintes

Dans un fluide visqueux, les forces de contact entre les éléments fluides comprennent à la fois les forces de pression et des cissions dues à la viscosité. Les cissions dépendent du taux de déformation des particules de fluide. On admet qu'elles résultent d'échange de quantité de mouvement à l'échelle moléculaire entre des particules ayant des vitesses différentes.

Le tenseur des contraintes $\overline{\sigma}$ peut se décomposer en la somme d'un tenseur sphérique $\overline{\sigma}_s$ et d'un tenseur déviateur $\overline{\sigma}_\delta$ de trace nulle

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_s + \overline{\sigma}_\delta$$



Tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformation

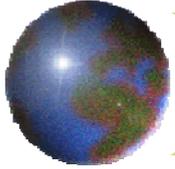
- Tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} + P & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} + P & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} + P \end{pmatrix}}_{\text{Tenseur des contraintes visqueuses}}$$

Cette relation peut se noter :

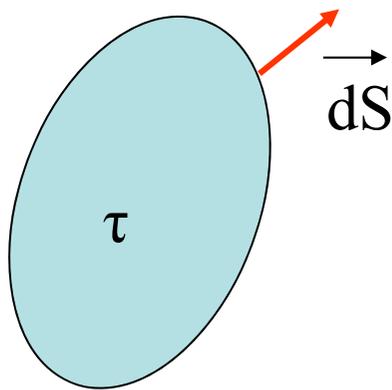
$$\underline{\underline{\sigma}} = -P \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\sigma}}_{\delta} \quad \text{avec } \underline{\underline{\delta}} \text{ tenseur unité}$$

Dans le cas du fluide parfait, $\sigma_{ij} = 0$ et $\sigma_{ii} = -P$, le tenseur des contraintes se réduit donc au premier terme.



Tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformation

- Forces de contact



La résultante des forces de contact est :

$$\vec{T} = \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS$$

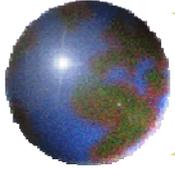
Soit en utilisant le théorème de la divergence :

$$\vec{T} = \iiint_{\tau} \text{div}(\vec{\sigma}) d\tau$$

On obtient par unité de volume :

$$\frac{d\vec{T}}{d\tau} = \nabla \cdot \vec{\sigma}$$

La résultante des forces de contact est égale à la divergence du tenseur des contraintes



Tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformation

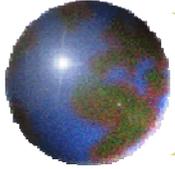
- Tenseur des taux de déformation

Ce tenseur a été introduit en cinématique

$$\overline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans cette expression, u , v , w sont les composantes de la vitesse dans un référentiel O , x , y , z

Remarque : la trace de ce tenseur est égale à la divergence de la vitesse ($\text{div } \vec{V}$)

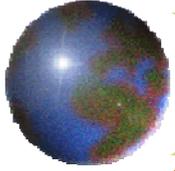


Tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformation

- Tenseur des taux de déformation

Comme précédemment, nous décomposons ce tenseur en la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur déviateur :

$$\overline{\overline{D}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \text{tr} \overline{\overline{D}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \text{tr} \overline{\overline{D}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \text{tr} \overline{\overline{D}} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{D}}_s \text{ (Taux de dilatation)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{tr} \overline{\overline{D}} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \text{tr} \overline{\overline{D}} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \text{tr} \overline{\overline{D}} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{D}}_\delta \text{ Taux de déformation sans changement de volume}}$$



Équation de mouvement d'un fluide incompressible réel

● Définitions

Pour connaître la loi de comportement du fluide, il est indispensable de préciser la relation existant entre le tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformation.

Fluides de Stokes

Le tenseur des contraintes est une fonction continue des taux de déformation et de l'état thermodynamique local. Il est indépendant de la rotation et de la translation de l'élément de fluide.

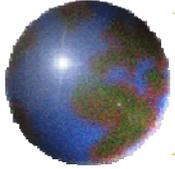
conséquences

Le fluide n'est pas élastique

Le fluide est homogène (le tenseur des contraintes ne peut pas dépendre explicitement des coordonnées)

Le fluide est isotrope

Lorsque $D = 0$ le tenseur des contraintes se réduit à celui créé par une pression hydrostatique.



Équation de mouvement d'un fluide incompressible réel

● Définitions

Fluide newtonien

C'est un fluide de Stokes linéaire



Les composantes du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires des composantes du tenseur des taux de déformation

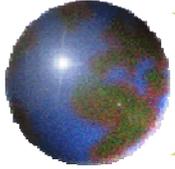
On admet :

$$\overline{\sigma} = -P\overline{\delta} + 2\mu\overline{D} + \eta\overline{\delta}tr(\overline{D})$$

μ est la viscosité dynamique du fluide

η est la viscosité de dilatation

$\overline{\delta}$ est le tenseur unité



Équation de mouvement d'un fluide incompressible réel

● Définition

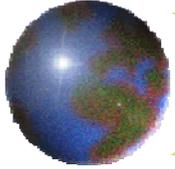
En posant : $e = tr(\overline{\overline{D}})$, on écrit les coordonnées de $\overline{\overline{\sigma}}$

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \eta\delta_{ij}e$$

avec
$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On pose : $\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \eta\delta_{ij}e$ tenseur des contraintes visqueuses

→
$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$



Équation de Navier Stokes

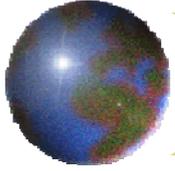
● Rappels

D'un point de vue Lagrangien, le théorème des quantités de mouvement s'écrit :

(la dérivée du torseur des quantités de mouvement d'un domaine de fluide que l'on suit dans son mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées au domaine)

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \vec{V} \right]_{\tau} = \left[\rho \vec{F} \right]_{\tau} + \left[\vec{T} \right]_S$$

Cette égalité entre deux torseurs conduit naturellement à deux égalités vectorielles: l'égalité des résultantes générales des torseurs et l'égalité des moments résultants des torseurs. Ces égalités fournissent les équations dynamiques et les équations de moment.



Équation de Navier Stokes

● Rappel

Égalité des résultantes générales

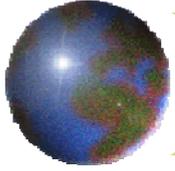
$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = \iiint_{\tau} \rho \vec{F} d\tau + \oiint_S \vec{T} dS$$

Égalité des moments résultants

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \vec{OM} \wedge \rho \vec{V} = \iiint_{\tau} \vec{OM} \wedge \rho \vec{F} d\tau + \oiint_S \vec{ON} \wedge \vec{T} dS$$

M est un point dans le volume, N est un point sur la surface, O est un point fixe dans le repère galiléen (par exemple l'origine)

Le projection de la première de ces relations dans le repère donnera les équations dynamiques ponctuelles.



Equation de Navier Stokes

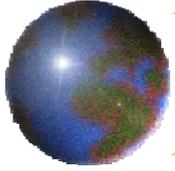
- **Équations dynamiques locales**

Projetons l'équation représentant l'égalité des résultantes sur trois axes trirectangulaires, on obtient trois équations intégrales :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho u_i d\tau = \iiint_{\tau} \rho F_i d\tau + \oiint_S T_i dS$$

où u_i , F_i , T_i sont respectivement les projections de la vitesse, de la densité volumique de force et de la force superficielle.

L'objectif est de transformer cette relation pour obtenir une équation ponctuelle (vraie en chaque point du fluide) représentant l'équation dynamique.



Équation de Navier Stokes

- **Équations dynamiques locales**

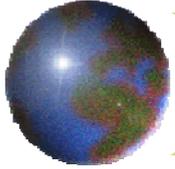
Effectuons les transformations suivantes :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho u_i d\tau = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} (\rho u_i) d\tau$$

et
$$\oiint_S T_i d = \oiint_S \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_{\tau} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau$$

Remarque : pour effectuer cette transformation, nous utilisons le théorème de Green Ostrogradski en effet :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \text{div} \sigma_{ij}$$



Équation de Navier Stokes

● Équations locales

On obtient donc :

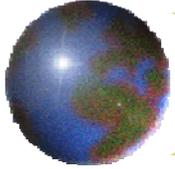
$$\iiint_{\tau} \frac{d}{dt}(\rho u_i) d\tau = \iiint_{\tau} \rho F_i d\tau + \iiint_{\tau} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau$$

Cette relation est vraie quelque soit l'élément de volume $d\tau$ ce qui donne l'équation locale:

$$\frac{d}{dt}(\rho u_i) = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

On fait l'hypothèse que les forces volumiques dérivent d'un potentiel

$$\vec{F} = - \vec{\text{grad}} U \quad \text{donc} \quad F_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}$$



Équation de Navier Stokes

● Équations locales

Introduisons maintenant l'expression de σ_{ij} : $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$

L'équation devient :

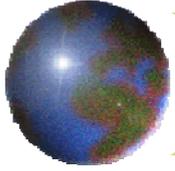
$$\frac{d}{dt}(\rho u_i) = -\rho \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{f_i}$$

On obtient l'équation vectorielle :

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{V}) = -\rho \text{grad } U - \text{grad } P + \vec{f}$$

Effet des contraintes visqueuses

Cette équation est l'équation fondamentale de la dynamique des fluides visqueux



Équation de Navier Stokes

● Équations locales

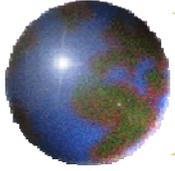
Nous allons maintenant remplacer τ_{ij} par son expression et écrire la projection de l'équation sur les axes Ox, Oy, Oz

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$


$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \Delta u_i + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial x_i}$$

Rappel : $e = \text{div } \vec{V}$

On fait l'hypothèse que μ et η sont invariables



Équation de Navier Stokes

● Équations locales

Les projections de l'équation dans le repère 0,x,y,z s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\rho u) = -\rho \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta u + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{d}{dt}(\rho v) = -\rho \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \Delta v + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{d}{dt}(\rho w) = -\rho \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \Delta w + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial z} \end{array} \right.$$

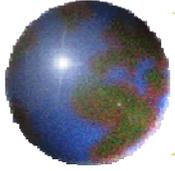
*u,v,w sont les
composantes de la
vitesse dans le repère
Ox,y,z*

Avec :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$e = \text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$



Équation de Navier Stokes

● Équations locales

Sous forme vectorielle, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{V}) = -\rho \vec{\text{grad}} U - \vec{\text{grad}} P + \mu \Delta \vec{V} + (\mu + \eta) \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{V})$$

Dernière hypothèse: on suppose le fluide incompressible donc $\text{div} \vec{V} = 0$

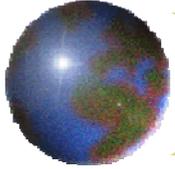
$$\rho \frac{d \vec{V}}{dt} = -\rho \vec{\text{grad}} U - \vec{\text{grad}} P + \mu \Delta \vec{V}$$

Cette relation constitue l'équation de Navier Stokes.

Ne pas oublier les hypothèses

Fluide newtonien, incompressible

Forces de volume dérivant d'un potentiel



Équation de Navier Stokes

● Cas des écoulements rampants

Ce sont des écoulements à très faibles vitesses, dans ce cas les forces de viscosité sont très supérieures aux forces d'inertie

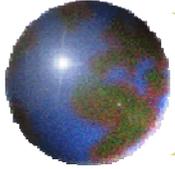
→ $\mu \Delta \vec{V} \gg \rho \frac{d\vec{V}}{dt}$

L'équation de Navier Stokes devient

$$\mu \Delta \vec{V} = \text{grad}(P + \rho g z) = \text{grad } P^*$$

Ici $\rho g z$ est le potentiel U lorsque les forces de volume se réduisent aux forces de pesanteur. En utilisant l'identité vectorielle :

$$\text{rot rot } \vec{V} = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V} \quad . \text{ Le fluide est incompressible donc } \text{div } \vec{V} = 0$$



Équation de Navier Stokes

- Écoulement rampant

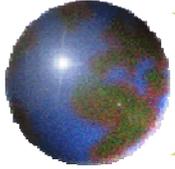
En remplaçant le laplacien par sa valeur on obtient :

$$-\mu \overset{\rightarrow}{rot} \overset{\rightarrow}{rot} \vec{V} = \overset{\rightarrow}{grad} P^*$$

Prenons la divergence des deux membres

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{\rightarrow}{div}(\overset{\rightarrow}{grad} P^*) \\ \Delta P^* &= 0 \end{aligned}$$

Un écoulement rampant est un écoulement qui obéit à l'équation de Laplace, on dit qu'il est à potentiel des pressions



Notion de perte de charge

● hypothèses

L'écoulement est permanent



$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

Les forces de volume se réduisent à la pesanteur



$$\vec{F} = -g \vec{\text{grad}}(\rho g z)$$

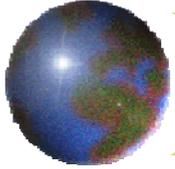
Le fluide est incompressible



$$\rho = cste \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{V} = 0$$

Écrivons l'équation de Navier Stokes

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} V^2 + \vec{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right)}_{=0} = -g \vec{\text{grad}}(P + \rho g z) + \mu \Delta \vec{V}$$

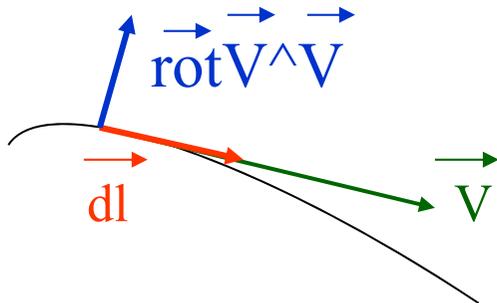


Notion de perte de charge

Mise en évidence

$$\mu \Delta \vec{V} - \text{grad}(P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2}) = \rho \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V}$$

Prenons la circulation élémentaire sur une ligne de courant :

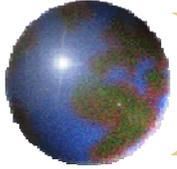


$$\begin{aligned} \underbrace{\text{grad}(P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2}) \cdot \vec{dl}}_{=} &= \mu \Delta \vec{V} \cdot \vec{dl} \\ &= d(P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2}) = \text{Variation de charge} \end{aligned}$$

Ce résultat montre que la charge totale de l'écoulement n'est pas constante le long d'une ligne de courant

$$\mu \Delta \vec{V} \cdot \vec{dl}$$

le long de la ligne de courant (J.m⁻³ représente la perte de charge)



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Remarques préliminaires

Résoudre les équations de Navier Stokes est souvent impossible en particulier pour les écoulements turbulents. On ne trouve des solutions exactes que dans des cas particuliers de mouvements lents de fluide et dans des conduits de faibles épaisseurs

Méthode :

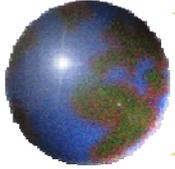
-On choisit le système de coordonnées qui convient à la symétrie du problème, et on projette l'équation de Navier Stokes dans le repère

-On tient compte des symétries (certains termes s'annulent)

-On tient compte de l'équation de conservation de la masse (div $\mathbf{V} = 0$)

-On obtient une équation différentielle qu'il faut intégrer

L'intégration fait apparaître des constantes que l'on détermine à l'aide des conditions aux limites



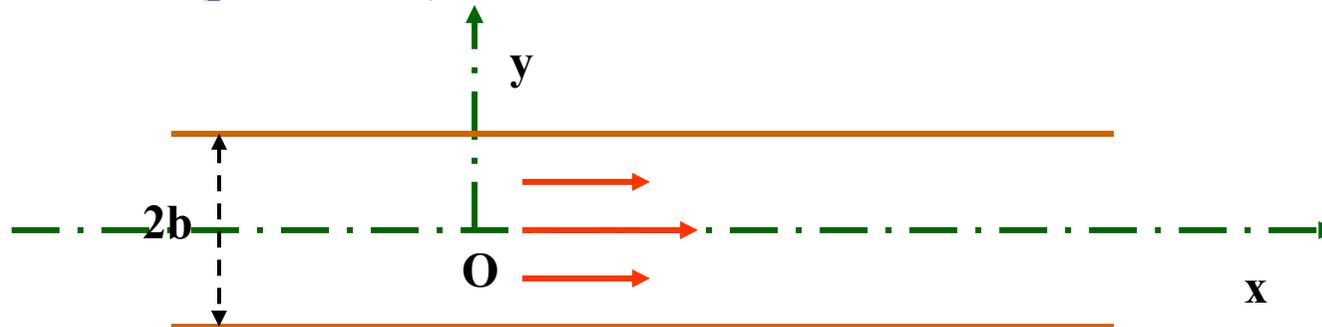
Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

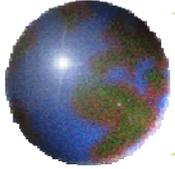
- Écoulement parallèle dans un conduit bidimensionnel

Hypothèses

On considère un conduit bidimensionnel infini, d'épaisseur $2b$ faible, l'axe x coïncide avec l'axe de symétrie du conduit.

Le fluide est considéré comme newtonien, incompressible en écoulement stationnaire (permanent) selon l'axe x .





Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Écoulement parallèle dans un conduit bidimensionnel

On choisit un repère cartésien, la projection de l'équation de Navier Stokes donne :

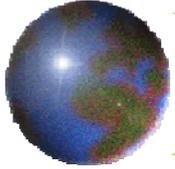
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho gy) - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho gy) - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho gy) - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \Delta w \end{array} \right.$$

(u,v,w) composantes de la vitesses suivant x, y, z

Symétrie : dans tout plan xOy, on a le même profil donc $w = 0$

Il n'y a pas de composantes de la vitesse suivant y donc $v = 0$

L'équation de continuité $\text{div } \vec{V} = 0$ impose $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

- Équation différentielle

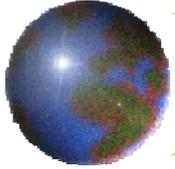
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta u \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \end{array} \right.$$

Ici, comme l'épaisseur est faible, on peut considérer que le terme ρg représentant les forces de pesanteur est négligeable

Le profil des vitesses dans le conduit est donc donné par la résolution de l'équation différentielle :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

Comme u ne dépend que de x , on peut remplacer la dérivée partielle de la vitesse par une dérivée totale



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Solution

L'équation différentielle à résoudre est :

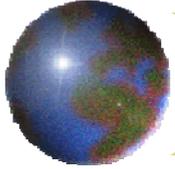
$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{ici } \mu \text{ et } \frac{\partial P}{\partial x} \text{ sont des constantes}$$

On intègre deux fois cette équation et on obtient :

$$u = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{y^2}{2} + Ky + K'$$

K et K' sont des constantes d'intégration, elles sont déterminées grâce aux conditions aux limites sur la vitesse (une particule de fluide en contact avec une paroi possède la vitesse de la paroi) soit:

$$\mathbf{u(b) = u(-b) = 0}$$



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Solution

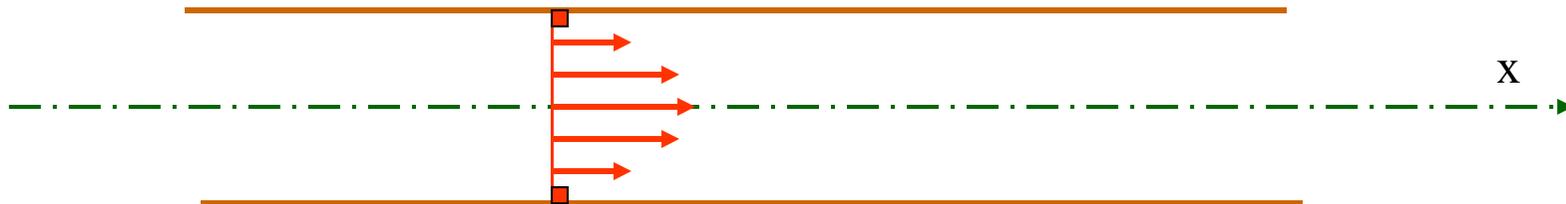
En insérant ces deux conditions dans l'équation précédente, on obtient un système de deux équations à deux inconnues facile à résoudre, on obtient :

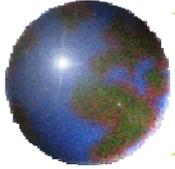
$$K = 0 \quad \text{et} \quad K' = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) b^2$$

En reportant dans l'équation, on trouve le profil des vitesses suivant :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) (y^2 - b^2)$$

Le profil des vitesses est parabolique





Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Compléments

Le gradient de pression peut être évalué, en effet si on néglige les forces de pesanteur :

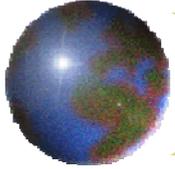
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \text{donc} \quad P = P(x)$$

On peut donc écrire en appelant P_1 et P_2 les pressions à l'entrée et à la sortie de la conduite :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_1 - P_2}{l}$$

l est la longueur de la conduite, $P_1 > P_2$

Il suffit de mesurer les pressions correspondantes pour déterminer le gradient de pression



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Définitions

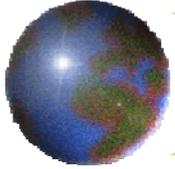
La vitesse moyenne de l'écoulement est définie par :

$$\bar{u} = \frac{q_v}{S} = \frac{1}{S} \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

S : section du conduit, q_v : débit en volume

Le débit en masse par unité d'aire

$$\frac{q_m}{S} = \rho \bar{u}$$



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Applications

Pour le conduit bidimensionnel, on trouve :

La vitesse maximale:

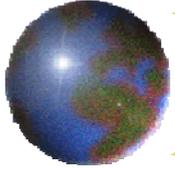
$$u_{\max} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) b^2$$

La vitesse moyenne:

$$\bar{u} = -\frac{1}{3\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) b^2 = \frac{2}{3} u_{\max}$$

Le débit en masse par unité d'aire:

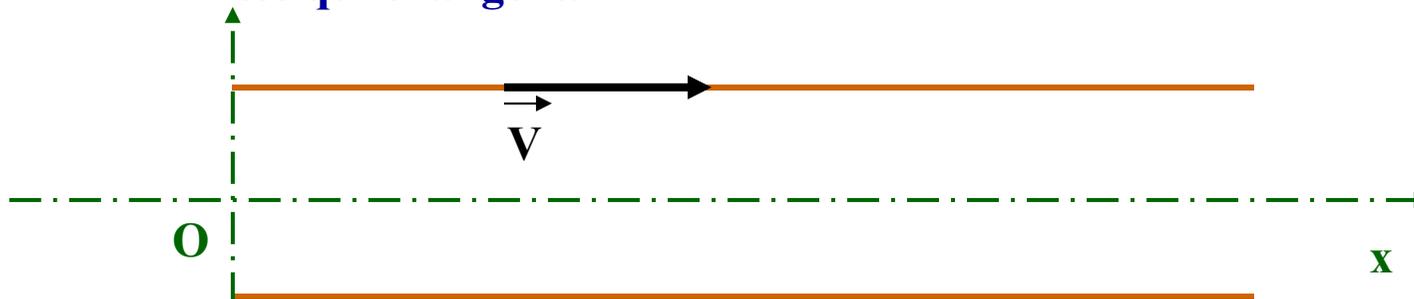
$$\frac{q_m}{S} = \frac{\rho}{3\mu} \frac{P_1 - P_2}{l} b^2$$



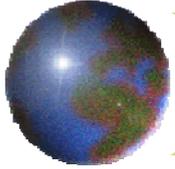
Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Écoulement de Couette

Une autre situation simple est celle de l'écoulement de Couette. On a les mêmes hypothèses que précédemment sur la géométrie du conduit, sur le fluide et l'écoulement. La différence vient du fait que la paroi supérieure possède une vitesse V . Comme dans l'exemple précédent, on néglige les forces de pesanteur. ON obtient bien sûr la même équation différentielle avec des conditions aux limites qui changent.



Les conditions aux limites deviennent : $u(b) = V$ et $u(-b) = 0$



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Solutions

La solution générale de l'équation est (comme dans l'exemple précédent :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) y^2 + Ky + K'$$

Avec les conditions aux limites, on trouve K et K'

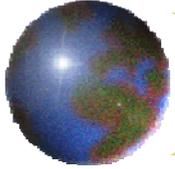
$$K = \frac{V}{2b} \quad \text{et} \quad K' = \frac{V}{2} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} b^2$$

La solution s'écrit donc:

$$u(y) = - \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (b^2 - y^2)}_{\text{Paroi fixe}} + \underbrace{\frac{V}{2} (y + b)}_{\text{Couette}}$$

Paroi fixe

Couette



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Profil des vitesses

On peut écrire le profil des vitesses sous la forme :

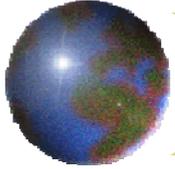
On pose: $K_1 = -\frac{b^2}{2\mu} \frac{dP}{dx}$  $u(y) = \frac{V}{2} \left(\frac{y}{b} + 1 \right) + K_1 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$

K_1 apparaît comme un gradient de pression adimensionnel

$K_1 > 0$ le gradient de pression décroissant est dans le sens du mouvement donc $u(y)$ est toujours positif

$K_1 < 0$ et inférieur à $-1/2$ la vitesse devient négative au voisinage de la paroi (le sens de l'écoulement est inversé).

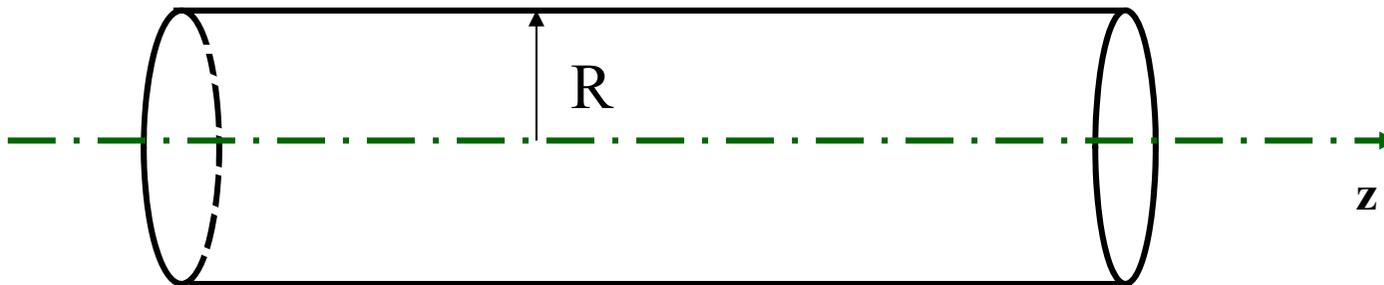
A titre d'exercice, étudier les différents cas possibles et faire un schéma des différents profils de vitesses obtenus



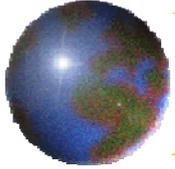
Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

- **Écoulement de Poiseuille**

Hypothèses : on étudie l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible, newtonien, à vitesse lente. Le conduit est cylindrique de rayon R petit. L'écoulement est permanent dans la direction z .



La pesanteur est négligée, la symétrie du conduit impose l'utilisation des coordonnées cylindriques(r, θ, z) les composantes correspondantes de la vitesse sont (u, v, w)



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

- **Projections de l'équation de Navier Stokes**

Direction radiale:

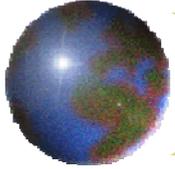
$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]$$

Direction tangentielle:

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right]$$

Direction axiale:

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Résolution de l'équation

Aux équations précédentes, ajoutons l'équation de continuité:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

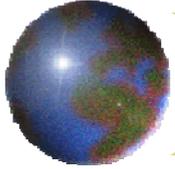
L'écoulement est suivant z donc u et v sont nuls et par symétrie $w = w(r)$, et

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \text{donc } P = P(z)$$

L'équation différentielle devient :

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{dP}{dz}$$

Les conditions aux limites sont : $w = 0$ pour $r = R$ et $w(0)$ est fini



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

● Solution

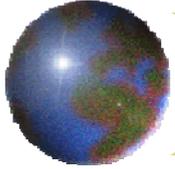
L'intégration donne: $w(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} r^2 + K \ln(r) + K'$

En tenant compte des conditions aux limites, on a: $K = 0$ et $K' = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} R^2$

La solution s'écrit donc:

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (R^2 - r^2)$$

Le profil des vitesses est parabolique et le gradient de pression $-dP / dz$ est $(P_1 - P_2) / l$, on le suppose connu par la mesure des pressions à l'entrée et à la sortie de la conduite.



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

- Loi de Hagen Poiseuille

La vitesse est maximale sur l'axe de la conduite:

$$w_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} R^2$$

La vitesse moyenne q_v / S est:

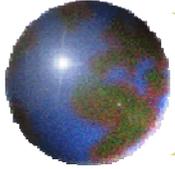
$$\bar{w} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R w(r) r dr = -\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dz} R^2 = \frac{w_{\max}}{2}$$

Le débit en volume est :

$$q_v = \pi R^2 \bar{w} = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dP}{dz}$$

Soit

$$q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{\pi D^4}{128\mu l} \Delta P$$



Solutions exactes de l'équation de Navier Stokes

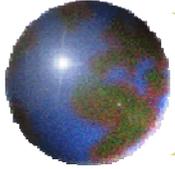
- Force de frottement sur la paroi

La force de frottement par unité de surface sur la paroi est :

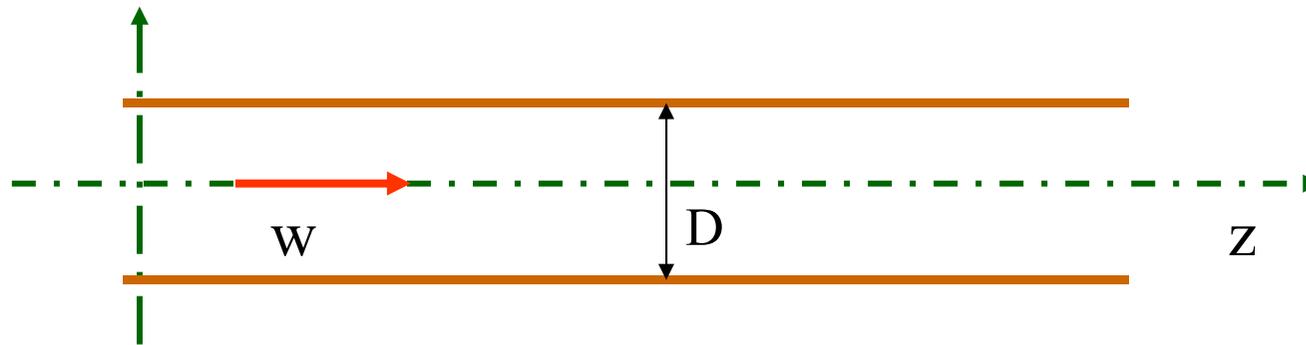
$$\tau = \left| \mu \frac{dw}{dr} \right| = \frac{dP}{dz} \frac{R}{2}$$

Pour toute la surface, on obtient :

$$F = \frac{dP}{dz} \frac{R}{2} 2\pi R l = \pi R^2 \frac{dP}{dz} l$$
$$F = S \Delta P$$



Le nombre de Reynolds

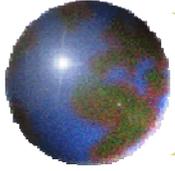


Hypothèses : conduit cylindrique de diamètre D . On étudie l'écoulement permanent d'un fluide incompressible visqueux. L'écoulement est suivant z .

Par définition la charge totale de l'écoulement est: $P + \rho g z + \frac{\rho \bar{w}^2}{2}$ **J.m⁻³**

Cette charge (l'énergie par unité de volume) diminue le long d'une ligne de courant

$$\frac{d(P + \rho g z + \frac{\rho \bar{w}^2}{2})}{dz} = \frac{dP^*}{dz} \text{ avec } P^* = P + \rho g z$$



Le nombre de Reynolds

● Perte de charge linéaire

La perte de charge est en général exprimée en mètre soit :

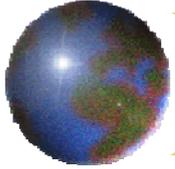
$$\frac{dH}{dz} = \frac{d\left(\frac{P}{\rho g} + \frac{\bar{w}^2}{2g} + z\right)}{dz} = \frac{1}{\rho g} \frac{dP^*}{dz}$$

Cas de l'écoulement de Poiseuille

La vitesse moyenne s'écrit: $\bar{w} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dz} R^2$ on pose $\frac{dP}{dz} = -a$

La variation élémentaire de charge sur un élément de ligne de courant est égale à

$$dH = -\frac{a}{\rho g} dz = -\frac{32\mu\bar{w}}{\rho g D^2} dz = -\frac{64\nu}{wD} \frac{\bar{w}^2}{2g} \frac{dz}{D}$$



Le nombre de Reynolds

- Perte de charge linéaire

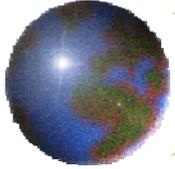
L'intérêt de cette écriture est de mettre en évidence des nombres sans dimension :

$$R = \frac{\bar{w}}{\nu} D = \frac{\rho \bar{w}}{\mu} D$$
$$\lambda = \frac{64}{R}$$

Nombre de Reynolds

Coefficient de perte de charge

Le coefficient de perte de charge linéaire λ a cette expression uniquement pour les écoulements lents dits laminaires.



Le nombre de Reynolds

- Perte de charge linéaire

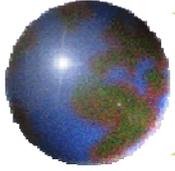
Entre deux points de la conduite, on a:

$$H_1 - H_2 = \int_1^2 -\lambda \frac{\bar{w}^2}{2g} \frac{dz}{D} = \int_1^2 -j dz$$

Nous verrons plus loin comment généraliser ces résultats en fonction du régime d'écoulement du fluide.

On peut calculer la puissance dissipée par frottement :

$$P \text{ (en watt)} = \Delta H \text{ (en m)} \rho \text{ (kg.m}^{-3}\text{)} g q_V \text{ (m}^3\text{.s}^{-1}\text{)}$$



Le nombre de Reynolds

● Définition

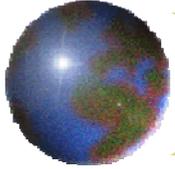
C'est un nombre sans dimension qui permet de fixer les limites d'application des modèles d'écoulement admettant un régime laminaire.

Pour une conduite circulaire de diamètre D le nombre de Reynolds s'écrit :

$$R = \frac{D\bar{w}}{\nu} = \frac{D\rho\bar{w}}{\mu}$$

Le nombre de Reynolds est proportionnel au rapport entre les forces d'inertie par les forces de viscosité.

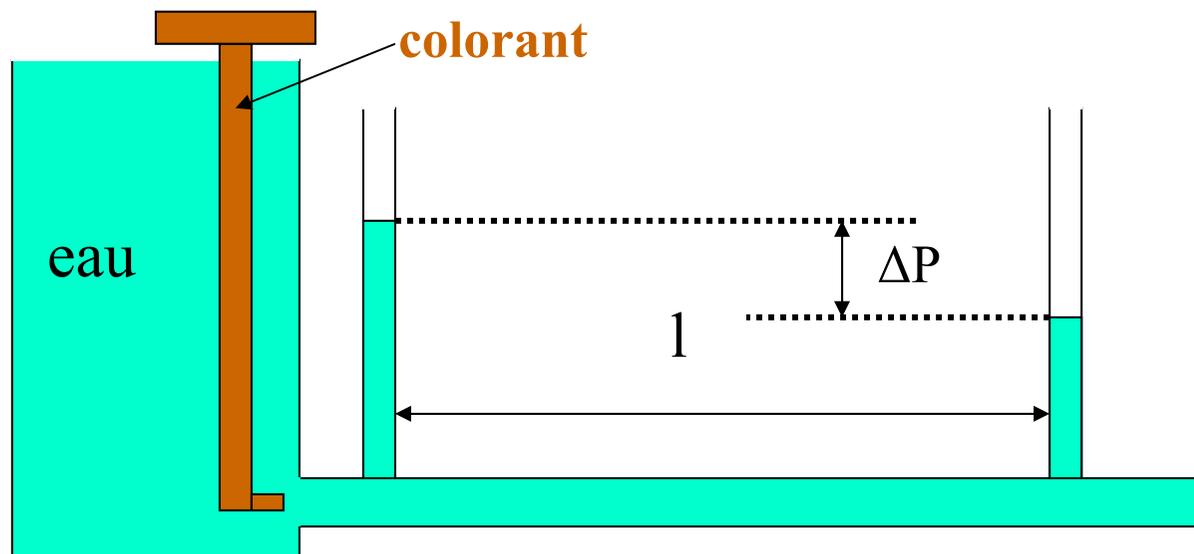
Remarque : pour un écoulement de forme quelconque, on remplace le diamètre D de la conduite par une grandeur caractéristique de l'écoulement (largeur d'un canal, envergure d'un profil d'aile..)



Le nombre de Reynolds

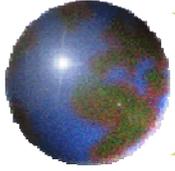
● Régime laminaire-régime turbulent

Expérience de Schiller-Reynolds:



Un réservoir alimente une conduite horizontale en verre munie de deux prises de pression. Une vanne permet de régler la vitesse d'écoulement. Un tube effilé muni d'un réservoir de colorant permet de visualiser l'écoulement.

On observe l'allure de l'écoulement en fonction de la vitesse du fluide.



Le nombre de Reynolds

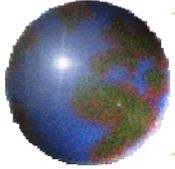
● Observation

Aux faibles vitesses: le filet coloré conserve son individualité jusqu'à l'extrémité du tube, il ne se mélange pas aux autres filets de fluide: **l'écoulement est dit laminaire**. La perte de charge est faible. Pratiquement, on observe ce régime pour des nombre de Reynolds $R < 2000$. Une perturbation introduite en un point s'atténue et disparaît en aval de ce point.

On augmente la vitesse: le filet coloré se met à osciller un certain temps et se mélange au reste du fluide. En même temps, on observe une brusque augmentation de la perte de charge. **Le régime est dit turbulent lisse**.

On augmente encore la vitesse du fluide: le filet coloré se mélange presque aussitôt son introduction dans le tube. **Le régime est dit turbulent rugueux**

La valeur du nombre de Reynolds qui sépare le régime laminaire du régime turbulent est appelé nombre de Reynolds critique $R_c = 2000$.



Le nombre de Reynolds

● Exemple

On considère une conduite industrielle de diamètre $D = 0.1$ m, siège d'un écoulement d'eau. Calculer la vitesse à partir de laquelle le régime est turbulent.

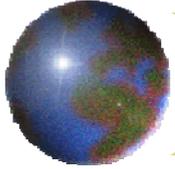
On donne $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Le nombre de Reynolds est donné par : $R = \frac{D \bar{w}}{\nu} = 2000$

En remplaçant on trouve :

$$\bar{w} = \frac{\nu 2000}{D} = \frac{10^{-6} 2000}{0.1} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ce résultat montre qu'en général les écoulements sont turbulents



Calculs pratiques de pertes de charge dans les conduites

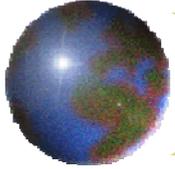
● **Expérience de Nikuradsé**

L'expérience de Nikuradsé a pour but de déterminer l'influence de la rugosité des parois sur le coefficient de perte de charge linéaire. Les parois d'une conduite sont rendues artificiellement rugueuses en y collant des grains de sable calibrés. En changeant la taille des grains on change la rugosité et on trace $\log \lambda$ en fonction de $\log R$. On appelle k_s la taille moyenne des grains collés et D le diamètre de la conduite. k_s / D est la rugosité relative. On remarque:

1- la rugosité n'a pas d'influence en régime laminaire et le nombre de Reynolds critique R_c est indépendant de la rugosité.

2- quand $R > R_c$ la perte de charge dépend fortement de k_s / D ou du nombre de Reynolds

3- quand $R \gg R_c$ la perte de charge ne dépend pas du nombre de Reynolds, elle ne dépend que de k_s / D



Calculs pratiques de pertes de charge dans les conduites

- **Expérience de Nikuradsé**

Régime laminaire ($R < 2000$)

$$\lambda = \frac{64}{R}$$

le coefficient de perte de charge est donné par :

Régime turbulent lisse ($R > 2000$ et $k_s / D < 1 / 30$):

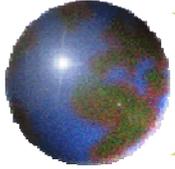
$$\lambda = 0.316 R^{-1/4}$$

Régime turbulent rugueux ($R \gg \gg 2000$)

$$\lambda = 0.79 \sqrt{\frac{k_s}{D}}$$

Il existe d'autres expressions des coefficients de pertes de charge en fonction des modèles utilisés par les auteurs. Par exemple pour les écoulements turbulents, on peut utiliser la formule de Colebrook et White:

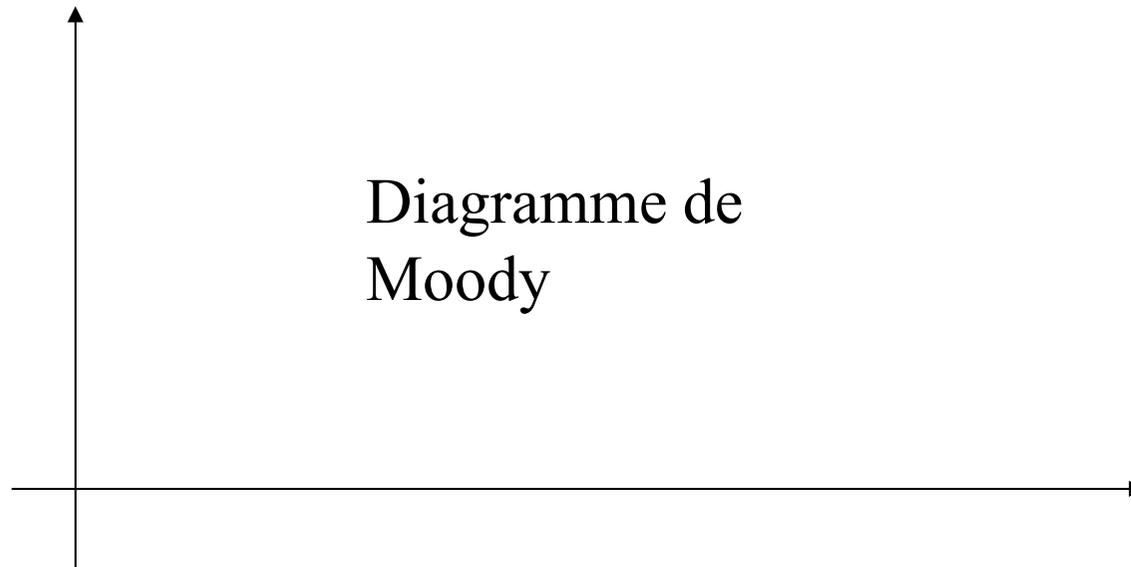
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\left(\frac{2.51}{R \sqrt{\lambda}} + \frac{k_s}{3.71 D} \right) \right]$$

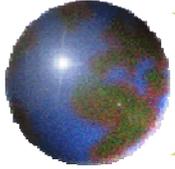


Calculs pratiques de pertes de charge dans les conduites

- **Diagramme de Moody**

En pratique, on utilise des abaques appelées diagramme de Moody qui représentent le coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative:





Calculs pratiques de pertes de charge dans les conduites

- Puissance dissipée

On considère une conduite cylindrique de diamètre D , de longueur L , le fluide a une vitesse moyenne w en écoulement suivant z . On a :

$$R = \frac{D\bar{w}}{\nu} = \frac{\rho D\bar{w}}{\mu}$$

La perte de charge s'écrit :

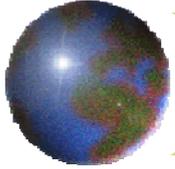
$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{w}^2}{2g}$$

en mètre

λ est trouvé par les méthodes précédentes

La puissance dissipée (en watt) s'écrit :

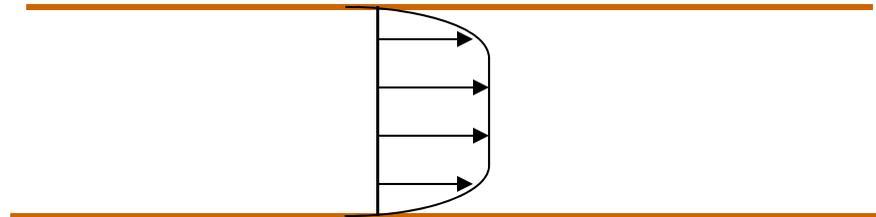
$$P = \rho g q_v \Delta H$$

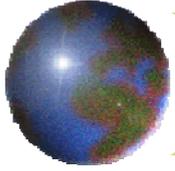


Notion de couche limite

● Définition

On considère l'écoulement d'un fluide entre deux plaques planes parallèles séparées par une épaisseur importante. L'expérience montre que loin des plaques, les forces de viscosité n'interviennent pas et l'écoulement est assimilable à celui d'un fluide parfait. Au voisinage des plaques, la vitesse croît de zéro à V . Dans cette zone de faible épaisseur, appelée couche limite, les forces de viscosité sont prépondérantes. On appelle épaisseur δ de la couche limite la distance entre la paroi et les points où la vitesse des particules est égale à 99% de la vitesse uniforme.



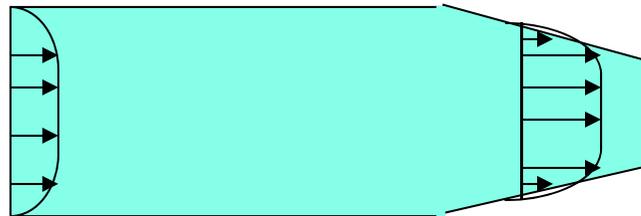


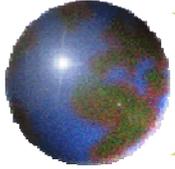
Notion de couche limite

- Cas d'un convergent

Dans le cas d'un convergent, l'écoulement est accéléré. La différence de pression est dirigée dans le sens de l'écoulement. Les forces de pression s'opposent aux forces de viscosité et favorisent l'écoulement. L'épaisseur de la couche limite diminue, il y a modification du profil des vitesses par une augmentation du gradient de vitesse dans la couche limite.

IL y a donc augmentation de la scission et augmentation de la perte de charge. Par contre la répartition des vitesses est plus uniforme.





Notion de couche limite

- **Cas du divergent: décollement**

Dans ce cas, le gradient de pression est défavorable à l'écoulement et il y a augmentation de la couche limite mais la scission à la paroi diminue. Si le divergent est trop ouvert ou trop long, il y a retournement des lignes de courant (des vitesses sont dans le sens contraire à l'écoulement), c'est ce que l'on appelle un décollement.

Les inconvénients du décollement sont : une augmentation de la traînée, une chute de rendement des turbomachines, des vibrations, des résonances. Il faut donc éviter les ralentissements trop rapides de l'écoulement et rendre les parois aussi lisses que possible pour diminuer les frottements..

