Exercice du chapitre 2

Mécanique analytique

Exercice 1

On considère un système de particules possédant ℓ degrés de liberté décrit par les coordonnées généralisées $q_{i=1,\dots,\ell}$ et un lagrangien $\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(q_1,\dots,q_\ell,\frac{dq_1}{dt},\dots,\frac{dq_\ell}{dt},t\right)$. Dans le cas de forces conservatives, vérifiez que, si le mouvement des particules relie à un instant initial t_1 un point $\left[q_1(t_1),q_2(t_1),\dots,q_\ell(t_1)\right]$ à un point $\left[q_1(t_2),q_2(t_2),\dots,q_\ell(t_2)\right]$ à un instant final t_2, alors l'action S, définie par l'équation ci-dessous, sera extrémale.

$$\mathcal{S}=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\,dt$$

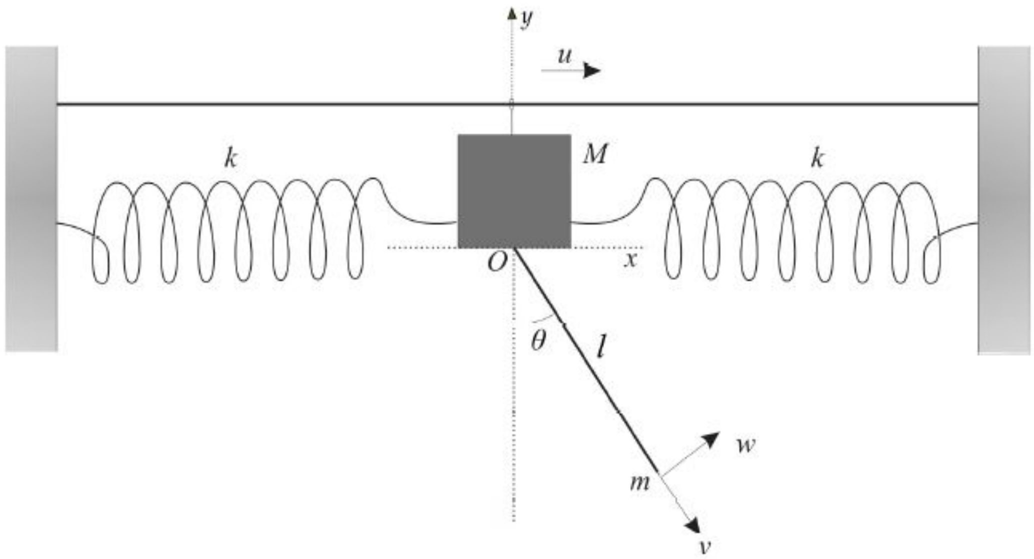
Guide de résolution du problème :

Afin de faciliter la résolution de ce problème, on se placera d'abord dans un cas à un seul degré de liberté

- Exprimer la différentielle de l'action δS_1.
- Transformer l'expression de δS_1 pour y faire apparaître les équations de Lagrange. Pour cela, on utilisera le fait que points d'arrivée et de départ sont parfaitement connus ainsi que le fait que $\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}(\delta x)\;dt=\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \dot{x}}\delta x\right)_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\right)dt$.
- Quelle condition trouve-t-on pour que l'action soit extrémale ?
- Sachant que l'action totale S d'un système à plusieurs degrés de liberté est la somme des actions individuelles S_i correspondant à chaque degré de liberté, trouvez la nouvelle condition pour que l'action soit extrémale.
- Que peut-on en conclure concernant le lien entre action S et équations de Lagrange ?

Exercice 2

Soit un système mécanique bidimensionnel décrit par le schéma ci-dessous. Ce système est constitué d'une masse ***m*** oscillant au bout d'une tige de longueur ***l***. Cette tige est elle-même fixée à une masse ***M*** pouvant osciller le long d'un axe horizontal ***Ox*** grâce à 2 ressorts. L'objectif de l'exercice est d'écrire les équations du mouvement du système.



1) Combien de degrés de liberté possède ce système ?
2) En utilisant le fait que nous sommes dans un cas où toutes les forces sont conservatives et en posant que les masses ***M*** et ***m*** peuvent être considérées comme des masses ponctuelles, trouver les expressions de l'énergie cinétique ***T*** et de l'énergie potentielle ***V*** du système et en déduire l'expression de son Lagrangien.
3) Ecrire les équations de Lagrange pour les 2 degrés de liberté du système et en déduire les équations du mouvement.

<u>Exercice 3</u>

On considère un système de ***N*** particules de masses $m_{\alpha=1,2,\dots,N}$ et de charges $e_{\alpha=1,2,\dots,N}$ repérées dans un référentiel galiléen par les vecteurs positions $\vec{r}_{\alpha=1,2,\dots,N}$ évoluant librement dans un champ électromagnétique $\vec{E}=-\vec{\nabla}U-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$. On négligera le poids de ces particules. On peut montrer que le lagrangien de ce système prend la forme ci-dessous.

$$\mathcal{L}=\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m_\alpha\left(\dot{\vec{r}}_\alpha\cdot\dot{\vec{r}}_\alpha\right)+e_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha\cdot\vec{A}-e_\alpha U\left(\vec{r}_\alpha\right)\right]$$

1) Déterminer l'expression des impulsions $\vec{p}_\alpha$ de ces particules. Que remarque-t-on ? En déduire l'expression des vitesses généralisées $\dot{\vec{r}}_\alpha$ en fonction des impulsions $\vec{p}_\alpha$.
2) Ecrire le hamiltonien $\mathcal{H}\left(\vec{p}_\alpha,\vec{r}_\alpha\right)$ du système sachant qu'il se définit comme : $\mathcal{H}\left(\vec{p}_\alpha,\vec{r}_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{p}_\alpha\cdot\dot{\vec{r}}_\alpha-\mathcal{L}$.
3) Ecrire les équations du mouvement à partir des équations de Hamilton. Conclure.