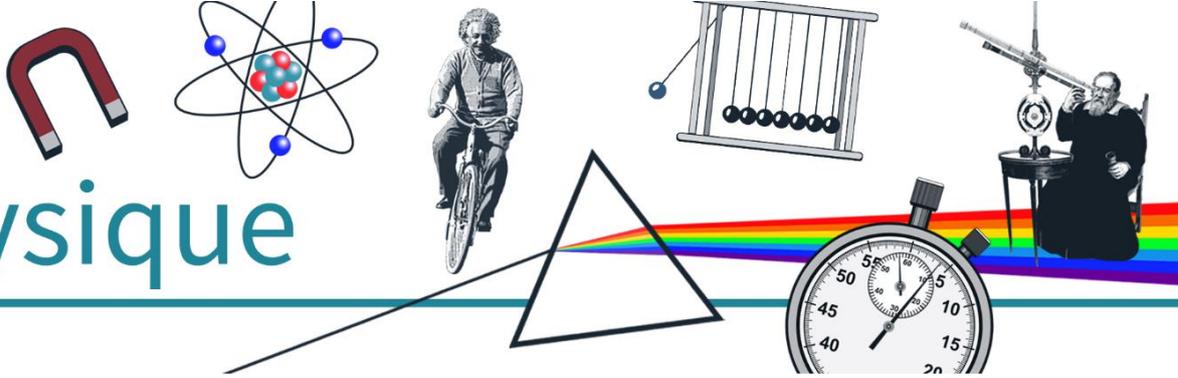


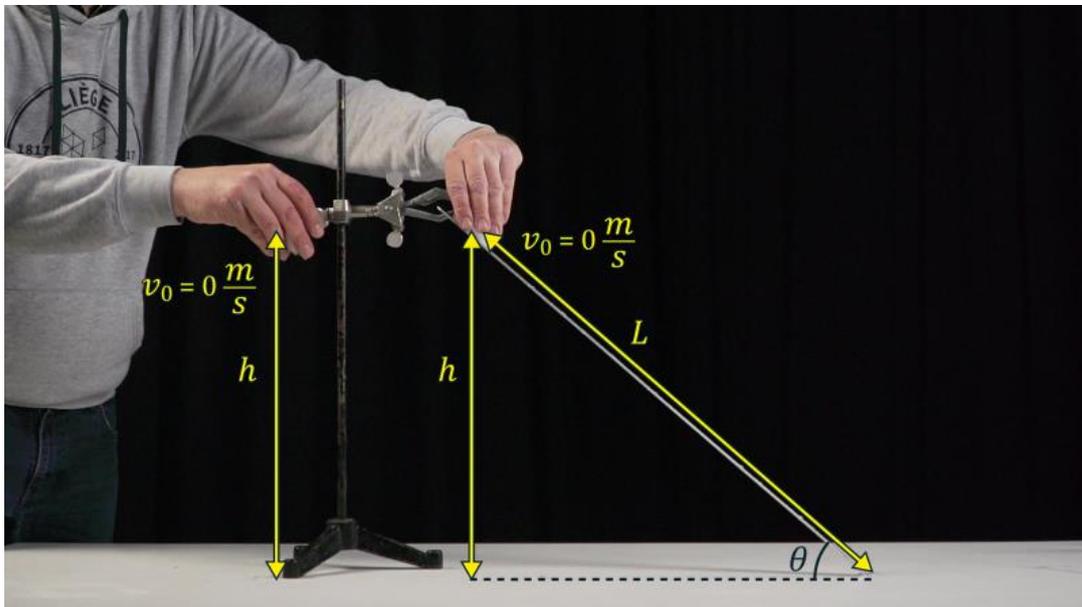


Physique



Course de glaçons : Egalité des vitesses au sol - Démonstration

Revenons à l'expérience des deux glaçons lâchés d'une même hauteur. Le premier est tombé en ligne droite verticale, le second a glissé le long d'un plan incliné. Nous allons démontrer que si nous négligeons tous les frottements, les vitesses des deux glaçons sont identiques lorsqu'ils arrivent sur la table. Rappelons que, puisque ces glaçons sont lâchés, leurs vitesses initiales sont nulles.



Commençons par trouver l'expression de la vitesse d'arrivée du premier glaçon.

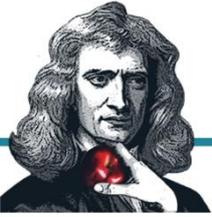
L'unique force qui s'applique sur le premier glaçon est son poids. Il est donc en chute libre, son accélération vaut donc g .

Choisissons un axe y vertical orienté positivement vers le haut et avec l'origine située au niveau de la table. La composante de l'accélération selon cet axe y est $-g$. La hauteur initiale du glaçon peut être notée h et sa hauteur finale est nulle. Enfin, la vitesse initiale du glaçon vaut 0 m/s .

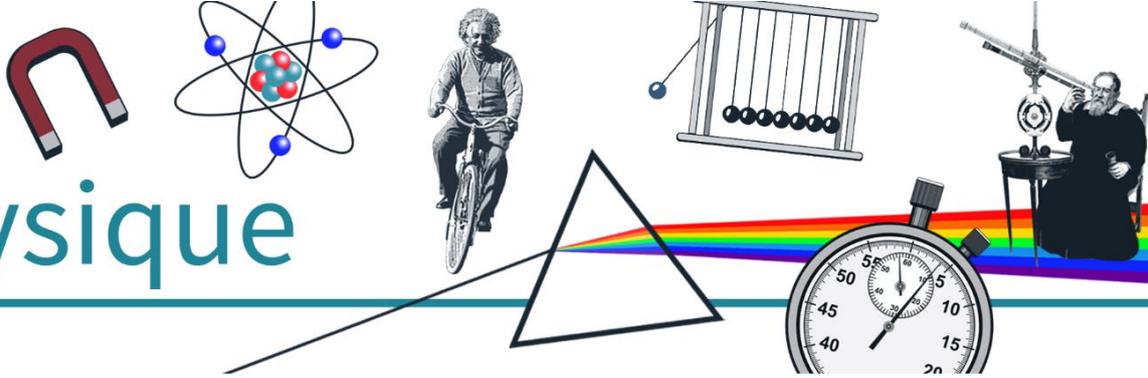
L'équation de l'évolution de la position au cours du temps dans un MRUA nous permet de trouver une expression pour le temps de chute de ce glaçon :

$$y(t) = 0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La loi de l'évolution de la vitesse dans un MRUA s'écrit, dans ce cas-ci : $v_{1,y}(t) = -gt$



Physique



En y insérant l'expression trouvée pour le temps de chute, nous trouvons :

$$v_{1,y} = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

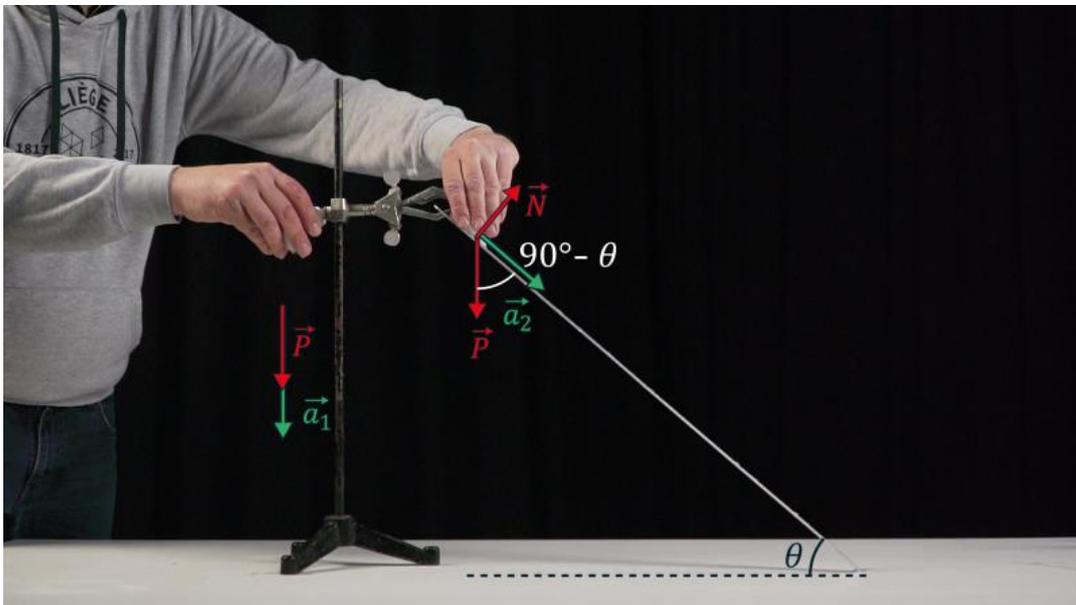
Notons que l'expression trouvée ici est négative car nous obtenons en réalité la composante de la vitesse selon l'axe choisi. Cette composante est bien négative puisque la vitesse est orientée verticalement vers le bas, alors que l'axe est orienté positivement vers le haut.

La vitesse du premier glaçon lors de son arrivée sur la table, autrement dit la norme de son vecteur vitesse à cette position, vaut :

$$v_1 = \sqrt{(-\sqrt{2gh})^2} = \sqrt{2gh}$$

Passons maintenant à la recherche de l'expression de la vitesse du second glaçon lorsqu'il arrive sur la table.

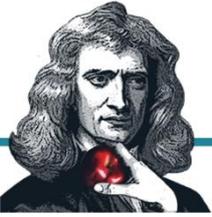
Durant sa chute le long du plan incliné, le glaçon est soumis à deux forces : son poids et la force normale.



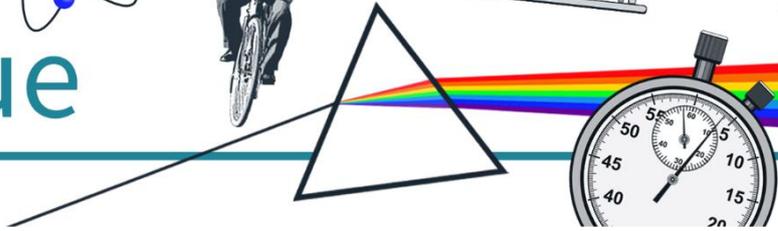
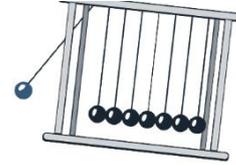
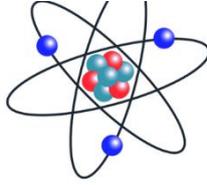
Choisissons un axe x orienté parallèlement au mouvement du glaçon et un axe y perpendiculaire à celui-ci. Comme le mouvement s'effectue en ligne droite le long de l'axe x , nous pouvons écrire la seconde loi de Newton et la projetée dans notre système d'axe.

Cela donne :

$$\begin{cases} x : mg \sin(\theta) = ma \\ y : N = mg \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{Avec } \theta \text{ l'angle entre le plan incliné et l'horizontale.}$$



Physique



Le second glaçon décrit donc un MRUA avec une accélération valant $a = g \sin(\theta)$.

Prenons comme origine de l'axe x , l'endroit où le glaçon débute son mouvement. La vitesse initiale du glaçon est nulle puisqu'il est simplement lâché. Il parcourt ensuite une distance L le long du plan incliné.

L'équation de l'évolution de la position au cours du temps dans un MRUA nous permet de trouver une expression pour le temps de chute de ce second glaçon :

$$x(t) = L = \frac{1}{2} g \sin(\theta) t^2$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{g \sin(\theta)}}$$

La loi de l'évolution de la vitesse dans un MRUA s'écrit, dans ce cas-ci :

$$v_{2,x}(t) = g \sin(\theta) t$$

En y insérant l'expression trouvée pour le temps de chute, la vitesse du second glaçon au moment où il arrive sur la table vaut donc :

$$v_{2,x} = g \sin(\theta) \sqrt{\frac{2L}{g \sin(\theta)}} = \sqrt{2g \sin(\theta) L}$$

Notons que l'expression trouvée ici est positive car la vitesse est orientée dans la même direction et le même sens que l'axe x .

Pour pouvoir affirmer que les vitesses des deux glaçons sont égales, il nous faut encore remarquer que $\sin(\theta) L = h$.

Dans ce cas, la norme de la vitesse du second glaçon lorsqu'il arrive sur la table s'écrit :

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Elle est donc bien égale à la vitesse du premier glaçon au moment où il arrive sur la table.

Pierre-Xavier Marique et Pauline Toussaint