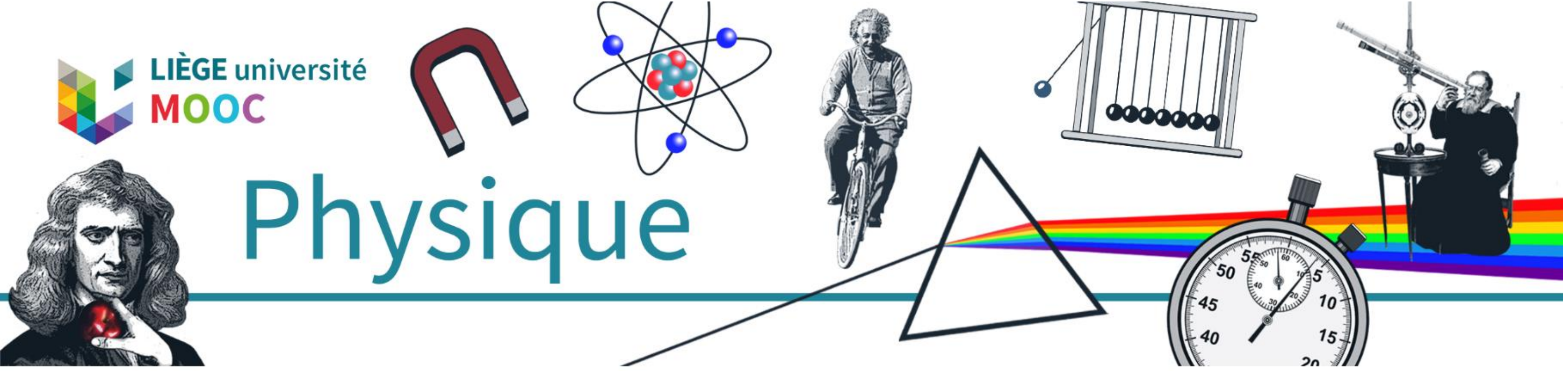


Expression de l'accélération centripète : Démonstration

Pour démontrer l'expression de l'accélération centripète, revenons au mouvement de la nacelle d'une grande roue. Nous allons considérer que la nacelle est en mouvement circulaire uniforme afin que l'accélération qu'elle subit soit orientée de manière centripète uniquement.

A l'instant t, la nacelle se trouve à une position définie par l'angle θ.

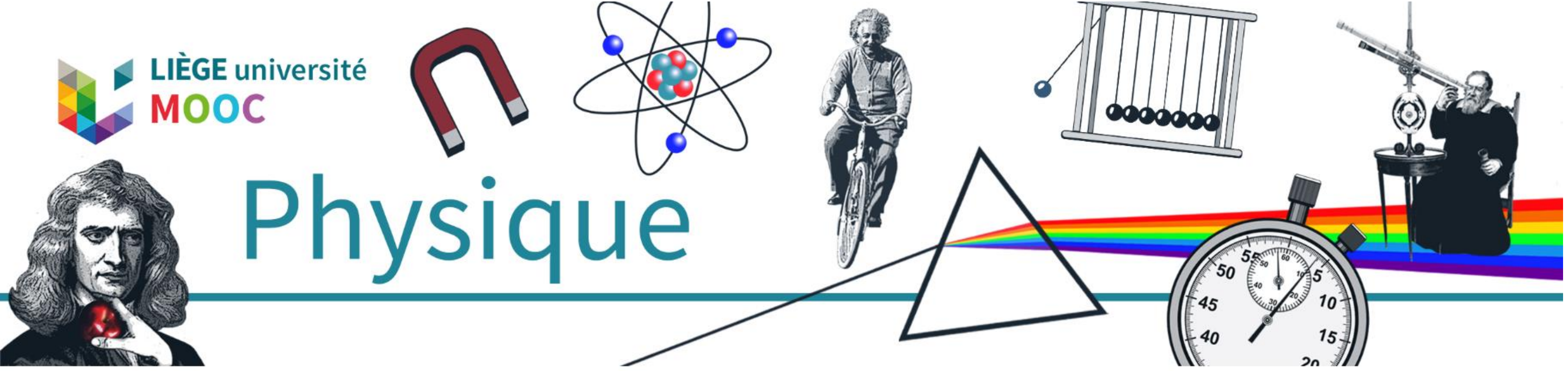
Le vecteur position de la nacelle, dans le système d'axes représentés sur le schéma, est donc : $\overrightarrow{r(t)} = (x(t)\,;y(t)) = (R.\cos\theta(t)\,;R\sin\theta(t))$

Chaque terme de ce vecteur position est le produit du rayon de la grande roue (rayon qui est constant) par une fonction trigonométrique dont l'argument est la position angulaire $\theta(t)$.

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse, il suffit de dériver l'expression du vecteur position $\overrightarrow{r(t)}$ par rapport au temps. La composante $v_x(t)$ du vecteur vitesse est égale à la dérivée par rapport au temps de la position $x(t)$, et la composante $v_y(t)$ à la dérivée de la position $y(t)$.

Donc :

$$\overrightarrow{v(t)} = \left(v_x(t)\,;v_y(t)\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\cos\theta(t))\,;\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R\sin\theta(t))\right)$$



Pour chaque composante, il s'agit donc de la dérivée d'un produit de fonctions.

Pour rappel :

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\big(f(x).g(x)\big) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{dx}}.g(x) + f(x).\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{dx}}$
- La dérivée d'une constante est nulle, donc la dérivée du rayon est nulle.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\big(f(g(x)\big) = \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{dx}}.\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{dx}}$
- La dérivée de la position angulaire θ est égale à la vitesse angulaire ω.

Nous obtenons pour chaque composante :

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\cos\theta(t)) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dt}}.\cos\theta(t) + R.\frac{\mathrm{d}\cos\theta(t)}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = 0 - R.\sin\theta(t).\omega$$

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\sin\theta(t)) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dt}}.\sin\theta(t) + R.\frac{\mathrm{d}\sin\theta(t)}{\mathrm{dt}}.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = 0 + R.\cos\theta(t).\omega$$

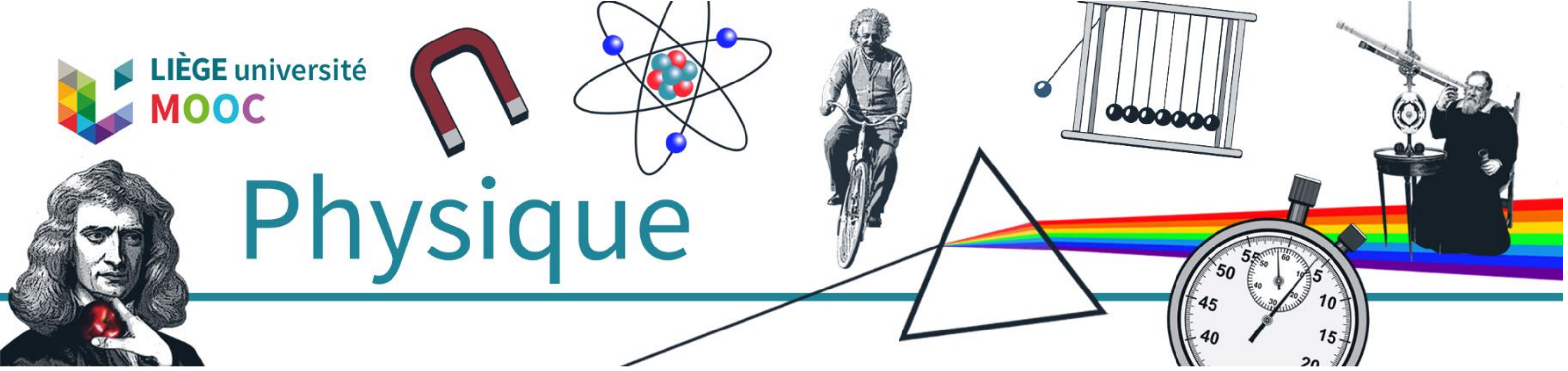
Puisque nous avons considéré que la nacelle décrivait un MCU, alors sa vitesse angulaire ω est constante.

Le vecteur vitesse peut alors être écrit sous la forme :

$$v(t) = \big(v_x(t); v_y(t)\big) = (-R\,.\,\omega.\sin\theta(t)\ ;\ R\,.\,\omega.\cos\theta(t))$$

Nous obtenons, dans le système d'axes choisi (voir schéma), une composante v_x négative et une composante v_y positive. Cela correspond bien à l'orientation du vecteur vitesse par rapport au système d'axes.

L'accélération que subit la nacelle de cette grande roue s'obtient en dérivant sa vitesse par rapport au temps. Nous allons procéder de la même manière que lors du passage de la position à la vitesse. Nous allons donc dériver le vecteur vitesse composante par composante.



Nous obtenons :

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(-R\,.\,\omega.\sin\theta(t)) = -\frac{\mathrm{d}R.\,\omega}{\mathrm{dt}}.\sin\theta(t) - R.\,\omega.\frac{\mathrm{d}\sin\theta(t)}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = 0 - R.\,\omega^2.\cos\theta(t)$$

$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R\,.\,\omega.\cos\theta(t)) = -\frac{\mathrm{d}R.\,\omega}{\mathrm{dt}}.\cos\theta(t) - R.\,\omega.\frac{\mathrm{d}\cos\theta(t)}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = 0 - R.\,\omega^2.\sin\theta(t)$$

Nous obtenons deux composantes négatives pour ce vecteur de l'accélération. Cela correspond bien à ce que nous observons sur ce schéma en fonction du système choisi.

L'accélération centripète, autrement dit la norme de ce vecteur accélération (puisqu'il s'agit d'un MCU) est donnée par la relation :

$$a(t) = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2} = R.\,\omega^2.\sqrt{(\cos\theta(t))^2 + (\sin\theta(t))^2} = R.\,\omega^2$$

La norme de l'accélération est bien constante.

Il est possible de trouver d'autres expressions pour l'accélération centripète. En effet, nous savons que la vitesse tangentielle est égale au produit de la vitesse angulaire par le rayon de la trajectoire. Donc :

$$\boldsymbol{a_{cp} = R.\,\omega^2} = R.\left(\frac{v}{R}\right)^2 \boldsymbol{= \frac{v^2}{R}} = \frac{v}{R}.\,v \boldsymbol{= \omega.\,v}$$

Remarquons enfin que cette expression reste valable dans le cas où le mobile étudié décrit une trajectoire courbe de manière non uniforme. Dans ce cas, il subira une accélération pour laquelle tant la composante centripète que la composante tangentielle seront non nulles. La composante centripète de l'accélération fait varier l'orientation du vecteur vitesse alors que la composante tangentielle de ce vecteur accélération fait varier la norme du vecteur vitesse.

Pierre-Xavier Marique et Pauline Toussaint