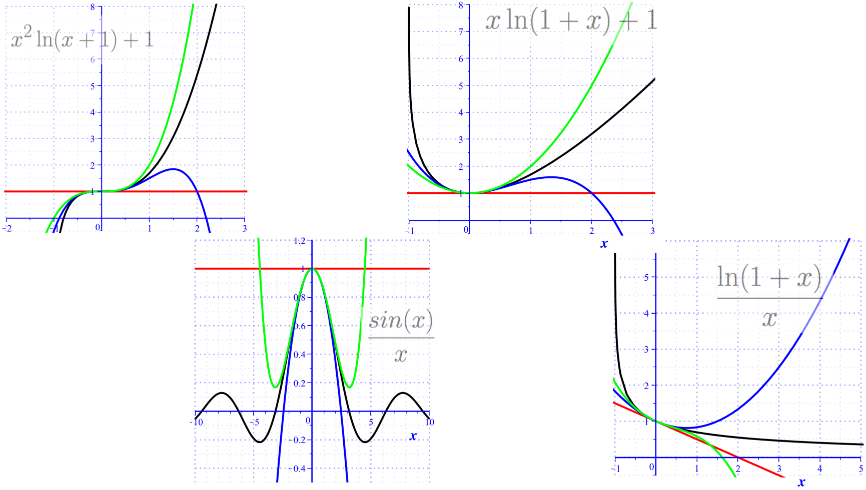
Formule de Taylor

Isabelle GIL

Maître de Conférences, Cnam


$x^2\ln(x+1)+1$
$x\ln(1+x)+1$
$\frac{sin(x)}{x}$
$\frac{\ln(1+x)}{x}$
x
x
x

Si $f(x) = x\ln(x+1)+1$:

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}$$

Si $g(x) = x^2\ln(x+1)+1$:

$$g'(x) = 2x\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}$$

$$g^{(2)}(x) = 2\ln(x+1) + 4\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2}$$

Définition de la dérivée en un point x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f\,'(x_0)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f\,'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)$$

avec $\varepsilon(x - x_0) \to 0$ quand $x \to x_0$
ce qui peut aussi s'écrire :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f\,'(x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x - x_0)$$

Cette formule peut être généralisée : c'est alors la **formule de Taylor à l'ordre n**, ou un **développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0**.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$+ (x - x_0)^n \, \varepsilon(x - x_0)$$

Cette formule ou ses conséquences servent souvent pour :

- ✓ étudier localement (au voisinage de x_0) la courbe,
- ✓ lever une indétermination lors de la recherche de limites,
- ✓ chercher l'équation de la tangente à la courbe au voisinage du point d'abscisse x_0,
- ✓ calculer des approximations en analyse numérique,
- ✓ ...

Dans la pratique, on utilise les développements limités au voisinage de 0 connus : formules dites de Taylor-Mac Laurin et on applique un changement de variable :

- ✓ $X = x - x_0$ pour ramener le calcul du développement limité en x_0, à celui d'une fonction au voisinage de 0.
- ✓ de même pour le calcul du développement limité de $f(x)$ au "voisinage" de l'infini, on pose $X = \dfrac{1}{x}$.

Principaux développements limités au voisinage de 0 à l'ordre n,

$\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0

- ✓ $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$
- ✓ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$
- ✓ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} x^n\epsilon(x)$

✓ $\ln(1+x) =$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$$

✓ $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots +$

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

✓ $\sin(x) =$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\epsilon(x)$$

✓ $\cos(x) =$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\epsilon(x)$$

On dit que les **fonctions f et g sont équivalentes au point x_0** si et seulement

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On note

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$$

Exemples :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$