

Mécanique des solides déformables

Version Septembre 2019

Auteur
Michel MAYA

Cet enseignement est issu du cours proposé sur le site

www.mmaya.fr

Des ressources complémentaires existent sur ce site.

Ce cours est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons
(Paternité + Pas d'utilisation commerciale + Pas de modification) 4.0 International



Table des matières

DESCRIPTIONS	3
Notations et variables	3
Représentations graphiques.....	9
Applications.....	14
DEFORMATIONS	19
Grandes déformations	19
Petites déformations	28
Représentations graphiques - Compatibilité.....	34
Application	39
CONTRAINTES	50
Lois de conservation	50
Principe fondamental	55
Propriétés des contraintes	64
Application	71
COMPORTEMENT	80
Relations contraintes déformations.....	80
Anisotropie	87
Application	93
ELASTICITE LINEAIRE	100
Limites d'élasticité	100
Schémas de résolution	109
Coordonnées cylindriques.....	114
Application	118
<i>Elasticité linéaire en coordonnées polaires</i>	<i>129</i>

DESCRIPTIONS

Notations et variables

1.

Cette semaine nous allons étudier les modes de représentation des grandeurs que nous allons rencontrer dans notre cours. La plupart d'entre vous est déjà familiarisé avec la notion de vecteur et sa représentation graphique. Conduit à utiliser la notion de tenseurs, nous allons décrire les outils nécessaires pour les représenter et travailler avec soit sous forme indicielle, soit sous forme graphique ce qui fera l'objet de deux leçons pour cette semaine. Sans plus tarder commençons par cette première leçon qui va nous permettre d'appréhender le mode de description de nos entités. Nous commencerons par définir les variables utilisées pour faire une description de l'état mécanique.

2.

Les problèmes que nous aurons à traiter seront relativement complexes et en conséquence, il y a de fortes chances que nous ne puissions obtenir une réponse mathématique satisfaisante. Afin d'aboutir dans nos calculs, nous serons obligés de faire des hypothèses qui auront pour objet essentiel de simplifier les modèles mathématiques à traiter. Ces hypothèses, nous les formulerons progressivement au cours de l'enseignement. Notre première hypothèse sera de dire que le domaine que nous étudions est un milieu continu en évolution continue au cours du temps.

Un domaine sera dit continu si toutes les fonctions qui le caractérisent sont des fonctions spatiales continues, c'est-à-dire si elles sont infiniment dérivables dans l'espace. Ainsi par exemple, la masse volumique, la température, la pression au sein d'un fluide, la vitesse des points d'un solide doivent être des fonctions ne présentant pas de discontinuité. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas toujours évident de respecter cette condition de continuité.

On peut avoir une discontinuité évidente lorsque l'on considère un domaine constitué d'eau et d'huile. Manifestement, au niveau de la surface de séparation des deux liquides, la masse volumique présente une discontinuité. Ceci étant, on pourra utiliser la mécanique des milieux continus pour traiter un problème de mélange eau huile. Il suffit de traiter séparément l'eau, considérée comme continue, et l'huile, fluide aussi continu, puis de rassembler les morceaux et d'écrire correctement les équations qui régissent l'interface entre les deux liquides. C'est bien entendu plus simple à faire lorsque les deux liquides sont miscibles et qu'ils forment ensemble un milieu continu.

Mais, bien que le vin soit miscible dans l'eau, le mélange obtenu s'il donne une impression de continuité, ne l'est plus dès lors que l'on regarde à l'échelle de l'atome. Bien entendu, à cette échelle, aucun domaine n'est continu. Mais à une échelle plus humaine, on a une impression de continuité. En admettant que le mélange eau vin est continu, on fait donc une hypothèse simplificatrice qui nous permettra de travailler avec des fonctions dérivables, et donc qui facilitera la résolution de notre problème. Plus l'hypothèse sera grossière, et plus il faut s'attendre à des écarts entre nos résultats de calcul et la réalité.

En considérant que le béton armé est continu, on peut s'attendre à des résultats un peu faussés. Mais ils seront proportionnellement beaucoup moins faux pour le calcul des piliers du viaduc de Millau, que pour le calcul d'un plancher d'un appartement. On conçoit assez facilement que sur de grandes structures, le béton armé est plus continu que sur des petites.

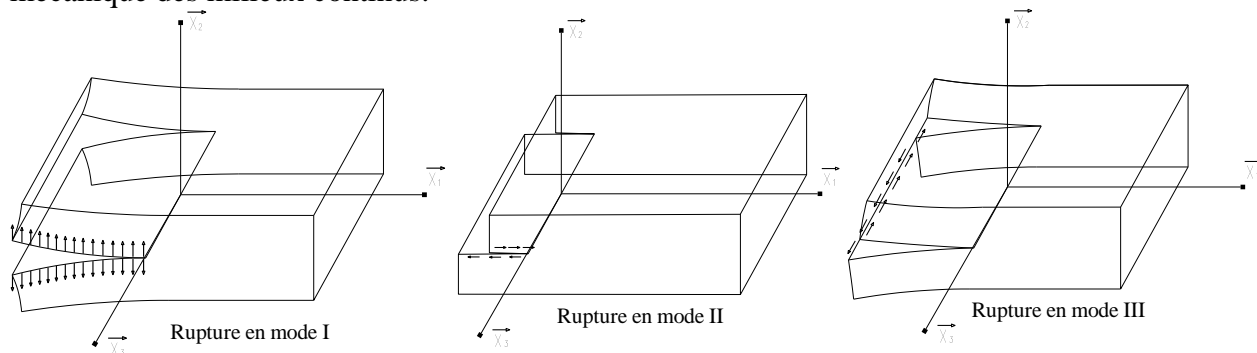
3.

Toutefois, la continuité spatiale n'est pas suffisante. Il faut aussi avoir une continuité temporelle. Les fonctions caractéristiques de notre domaine doivent être aussi infiniment dérivables vis-à-vis de la variable temps.

Ainsi par exemple, la masse volumique d'un corps que l'on réchauffe sera une fonction continue au cours du temps. A nouveau cette continuité dans le temps n'est pas toujours acquise.

Les phénomènes de cavitation sont un exemple de discontinuité. Lorsqu'au sein de l'eau liquide on passe en un point en dessous de la pression de vapeur saturante, une bulle de vapeur se forme instantanément. Bien entendu la masse volumique va alors brutalement varier.

De même la mécanique de la rupture qui a pour objet l'étude de la propagation de fissures dans un domaine fourmille d'exemple de fonctions discontinues, comme par exemple le déplacement d'un point. Mais à nouveau, par des artifices, nous arriverons à traiter la mécanique de la rupture en prenant pour base la mécanique des milieux continus.



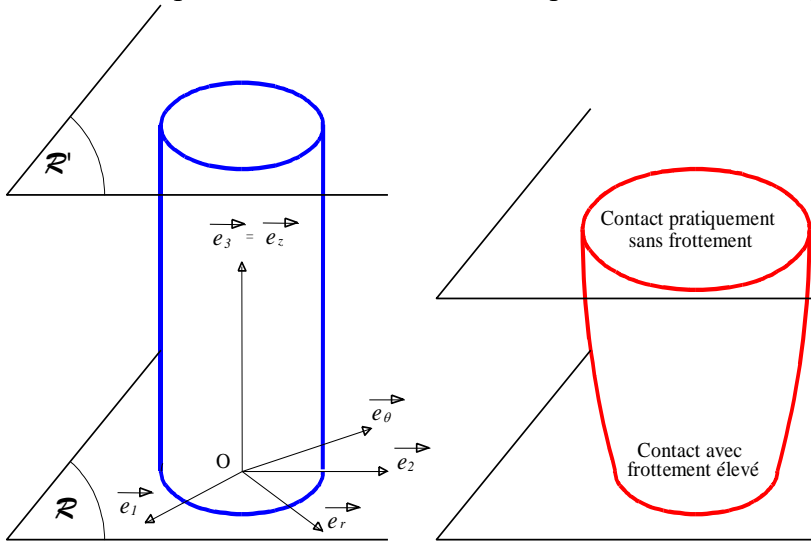
4.

Avant de définir les variables que l'on peut utiliser pour faire une étude, il convient de préciser comment seront repérées ces variables. Et pour cela nous allons définir les notions de référentiels et de repères.

Le référentiel est attaché à l'observateur. Il représente l'ensemble des points animés d'un mouvement de corps rigide par rapport à l'observateur. Les fonctions étudiées seront définies par rapport à ce référentiel. Pour des fonctions scalaires, telles que la température, ou la masse volumique, le référentiel est suffisant pour les caractériser. Quand on parle de température en un point d'un corps, on désigne la valeur d'une fonction scalaire dont on mesure l'écart par rapport à un référentiel. Par contre, pour des fonctions plus complexes comme des fonctions vectorielles telles que la vitesse d'un point, il est d'usage courant de les symboliser par leurs composantes sur des repères.

Pour des besoins de simplification de visualisation, mais pas nécessairement d'écriture, nous associerons donc des repères aux référentiels utilisés. Ce repère, caractérisé par le choix d'un point dit origine et d'une base, nous permettra de décrire des fonctions scalaires qui ne seront pas moins que les composantes de la fonction vectorielle dans le repère. Bien évidemment, il est possible d'associer plusieurs repères à un référentiel. Ainsi, tout en gardant le même point origine, on pourra parler de repère cartésien ou de repère curviligne comme le repère cylindrique. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est que n'est pas en changeant de repère, donc de composantes étudiées, que l'on changera fondamentalement la fonction complexe étudiée. On parle alors de fonction tensorielle.

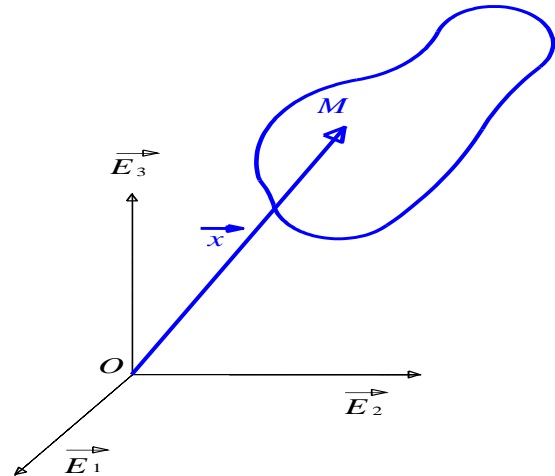
Dans l'exemple de l'écrasement d'un lopin entre les deux plateaux d'une presse, on peut définir deux référentiels différents. L'un est associé au plateau supérieur, l'autre au plateau inférieur. Il est indispensable que les deux observateurs dépendants de ces deux référentiels traduisent, dans leur référentiel, et éventuellement si nécessaire avec leur repère, le même phénomène physique et qu'ils puissent l'un et l'autre échanger leurs informations sans problème. C'est la propriété d'objectivité du phénomène. L'état final du lopin doit objectivement être le même pour l'observateur lié au plateau supérieur que pour l'observateur lié au plateau inférieur.



5.

Le choix d'un référentiel, et éventuellement d'un repère, étant fait, on peut maintenant envisager de décrire l'évolution de nos variables d'étude. En ce qui nous concerne, nous utiliserons l'école lagrangienne pour le choix des variables d'études. Mais avant, donnons quelques informations sur la notation indicielle que nous allons utiliser.

Considérons donc un repère associé à un point origine noté O et une base. Les vecteurs de la base seront notés E_1 , E_2 et E_3 avec des indices et non pas X, Y et Z comme cela est souvent utilisé.



Le positionnement d'un point M quelconque de l'espace est donné par le vecteur \overrightarrow{OM} défini dans notre référentiel. Pour avoir une représentation de ce vecteur, on utilisera les composantes scalaires x_1 , x_2 et x_3 obtenues par projection du vecteur position sur les vecteurs de base.

On pourra donc écrire $\overrightarrow{OM} = x_1 \overrightarrow{E_1} + x_2 \overrightarrow{E_2} + x_3 \overrightarrow{E_3}$.

Cette notation étant un peu longue à écrire, en général, on préfère une notation plus abrégée avec le signe de sommation : $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^3 x_i \overrightarrow{E_i}$. L'indice i prend alors trois valeurs ce qui nous donne les trois termes de notre vecteur.

Mais comme nous travaillons presque systématiquement dans un espace vectoriel de dimension 3, une simplification nouvelle dans l'écriture peut être apportée en enlevant le signe de sommation : $\overrightarrow{OM} = x_i \overrightarrow{E_i}$. L'expression devient alors très concentrée. Cette écriture ne traduit plus que le strict nécessaire. On obtient ainsi la convention de notation dite d'Einstein.

6.

La convention d'Einstein utilise largement la notation indicielle. La règle est relativement simple : si dans un monôme un indice est doublé, alors il y a sommation automatique pour cet indice sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Dans nos applications, comme nous resterons majoritairement dans un espace vectoriel à trois dimensions, cela implique que l'indice doublé peut prendre les valeurs 1, 2 et 3. Un tel indice est dit indice muet. Il peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre, cela ne change rien au résultat. Un indice qui n'est pas répété dans le monôme est dit indice réel ou encore par opposition indice parlant. Un indice réel doit se trouver à l'identique de part et d'autre d'une égalité. Il est nécessairement unique. Dans la convention d'Einstein, on ne peut trouver que des indices doublés, donc muets, ou des indices uniques, donc réels. On ne peut pas trouver par exemple des indices triplés ou quadruplés. Dans les exemples donnés, on trouve en deuxième ligne le produit scalaire de deux vecteurs. La dernière expression représente l'une des formes simples de la loi de Hooke. Les connaisseurs apprécieront.

En jaune : indice muet En rouge : indice réel

$$U = a_{ij} b_i c_j = a_{lm} b_l c_m = a_{ij} b_l c_j \quad V_k = a_{km} b_m$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_i \vec{E}_i) \cdot (b_j \vec{E}_j) = a_m b_n \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n$$

$$\vec{OM} = x_i \vec{E}_i \quad \vec{A} = t_{ij} p_i \vec{E}_j \quad \sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

7.

Nous allons traiter quelques petits exemples afin de nous familiariser un peu avec cette notation qui sera régulièrement employée dans notre cours.

Reprenons tout d'abord la formule précédemment donnée pour le produit scalaire de deux vecteurs quelconques. On voit que le résultat dépend du produit scalaire des vecteurs qui constituent notre base. Dans le cas général, cette base sera orthonormée. Le produit scalaire de deux vecteurs unitaires vaut 0 si les deux vecteurs sont orthogonaux et 1 si les deux vecteurs sont confondus.

Produit scalaire

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_i \vec{E}_i) \cdot (b_j \vec{E}_j) = a_m b_n \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n$$

$$\vec{E}_m \cdot \vec{E}_n = \delta_{mn} \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \left(\vec{E}_m \perp \vec{E}_n \right) \\ 1 \text{ si } m = n \left(\vec{E}_m = \vec{E}_n \right) \end{cases}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_m b_n \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n = a_m b_n \delta_{mn}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_m b_n \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n = a_m b_m = a_i b_i$$

On utilisera alors le symbole de Kronecker pour traduire ce résultat. Dans ce symbole, si les deux indices qui le composent sont différents, il vaut 0 et si les deux indices sont identiques, il vaut 1.

Dès lors, dans la double sommation qui traduit le produit scalaire, il n'est pas utile de garder les termes pour lesquels les deux indices sont différents.

En ne gardant que les termes ayant des indices identiques pour le symbole de Kronecker, ce dernier vaut 1. Et le résultat final est dès lors très simple.

8.

On peut aussi s'intéresser à l'expression indicielle de certains opérateurs couramment employés en physique.

Pour cela considérons tout d'abord une fonction continue scalaire $s(M) = s(x_i)$ définie en tout point de l'espace. On admet que la valeur de cette fonction dépend de la position du point, position donnée par les variables x_i . On parlera d'un champ scalaire.

On peut alors envisager de regarder, par l'intermédiaire de l'opérateur gradient, quelles sont les variations spatiales de notre fonction. On obtient un vecteur. Dans un repère cartésien, les composantes de ce vecteur sont données par les dérivées partielles de la fonction $s(x_i)$ vis-à-vis respectivement des variables de position.

On peut aussi considérer une fonction continue vectorielle V définie elle aussi en tout point de l'espace. Cette fois, ce sont les composantes dans une base cartésienne qui seront dépendantes de la position du point. On parlera d'un champ vectoriel.

$$s(M) = s(x_i) \text{ avec } \overline{OM} = x_i \overline{E}_i$$

$$\overline{\text{grad}}(s) \cdot d\overline{OM} = ds \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\text{grad}}(s) = \frac{\partial s}{\partial x_i} \overline{E}_i$$

$$\overline{V}(M) = V_i(M) \overline{E}_i = V_i(x_j) \overline{E}_i$$

$$\text{div}(\overline{V}) = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

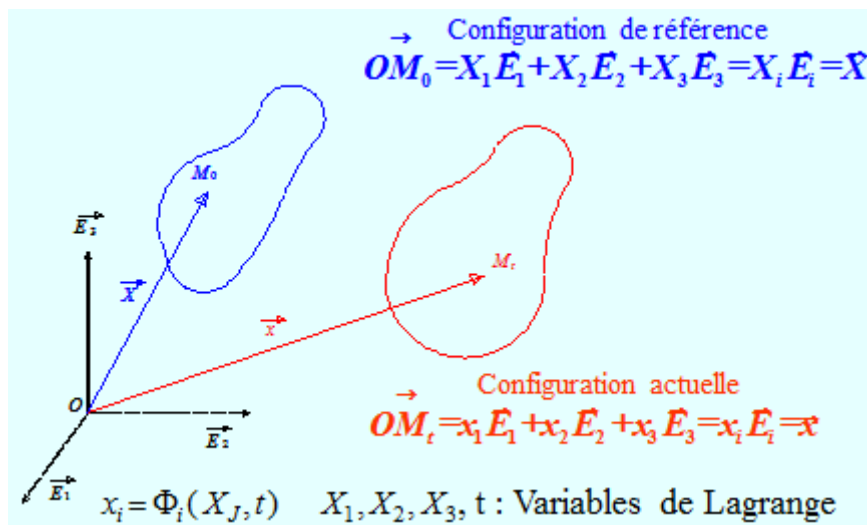
$$\text{div}(s \overline{V}) = \frac{\partial (s V_i)}{\partial x_i} = s \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial s}{\partial x_i} V_i = s \text{div}(\overline{V}) + \overline{\text{grad}}(s) \cdot \overline{V}$$

On peut donner l'expression de la divergence d'un vecteur. On obtient alors une fonction scalaire dont la valeur est la somme des dérivées partielles des composantes vis-à-vis respectivement des variables de position. A partir de ces résultats, on peut facilement en obtenir d'autres.

Par exemple, si l'on veut exprimer la divergence d'une fonction vectorielle multipliée par une fonction scalaire, il nous suffit de faire le calcul avec la notation indicielle pour obtenir le résultat.

9.

Afin d'étudier l'évolution d'un domaine, il faut tout d'abord se donner un référentiel d'étude. Pour des questions de facilité de représentation, on associera un repère à ce référentiel. On pourra alors, pour un instant choisi arbitrairement comme initial, déterminer l'ensemble des vecteurs positions des particules matérielles constituant le domaine. On définit ainsi la configuration de référence. Pour décrire le mouvement du domaine par rapport à ce référentiel, il convient de se donner la loi d'évolution au cours du temps des vecteurs positions.



On obtient alors un champ vectoriel fonction du temps. Cela nous donnera la configuration actuelle. Dans un premier temps, nous adopterons par convention des lettres majuscules pour la configuration de référence et des lettres minuscules pour la configuration actuelle.

On constate qu'il faut être capable de donner les lois d'évolution des paramètres de position actuelle en fonction des paramètres de position initiale et du temps pour connaître

l'évolution du domaine. Les paramètres de position initiale et le temps constituent les variables de Lagrange.

10.

Le vecteur vitesse d'un point est obtenu par dérivation par rapport au temps du vecteur position. Si la base utilisée pour la représentation est une base cartésienne, c'est-à-dire avec des vecteurs indépendants de l'espace et du temps, les composantes du vecteur vitesse dans cette base seront obtenues simplement par dérivation par rapport au temps des composantes du vecteur position. Comme dans les variables de Lagrange, la position initiale du point est indépendante du temps, on peut utiliser indifféremment une dérivée droite ou une dérivée partielle pour calculer les composantes du vecteur vitesse.

Vitesse

$$V(M,t) = \frac{d\vec{OM}_t}{dt} \quad x_i = \Phi_i(X_J,t)$$

$$v_i = \frac{d\Phi_i}{dt}(X_J,t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(X_J,t)$$

Accélération

$$\overline{\gamma(M,t)} = \frac{d\overline{V(M,t)}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}_t}{dt^2}$$

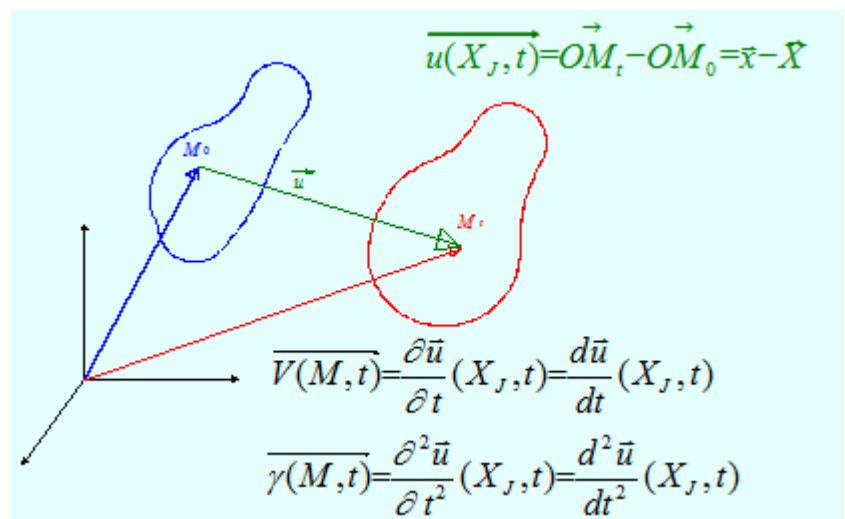
$$\gamma_i = \frac{d^2\Phi_i}{dt^2}(X_J,t) = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}(X_J,t)$$

Pour le vecteur accélération, les calculs sont tout aussi simples à partir de l'instant où l'on sait qu'il suffit de dériver par rapport au temps le vecteur vitesse. On peut aussi dériver deux fois le vecteur position.

11.

Mais on peut aussi utiliser le vecteur déplacement pour exprimer les quantités précédentes. Le déplacement d'un point représente la différence entre le vecteur position dans la configuration actuelle et le vecteur position dans la configuration de référence.

Sachant que le vecteur position dans la configuration de référence est indépendant du temps t , on peut alors facilement démontrer que le vecteur vitesse est obtenu par simple dérivation du vecteur déplacement. Pour le vecteur accélération il faudra dériver deux fois.



12.

En conclusion de cette leçon, nous retiendrons qu'il est utile de définir notre référentiel pour pouvoir communiquer tous nos résultats. Nous avons aussi vu que la notation indicielle peut permettre de simplifier les démonstrations. Enfin nous sommes entrés en contact avec la description lagrangienne.

1-2 DESCRIPTIONS

Représentations graphiques

1.

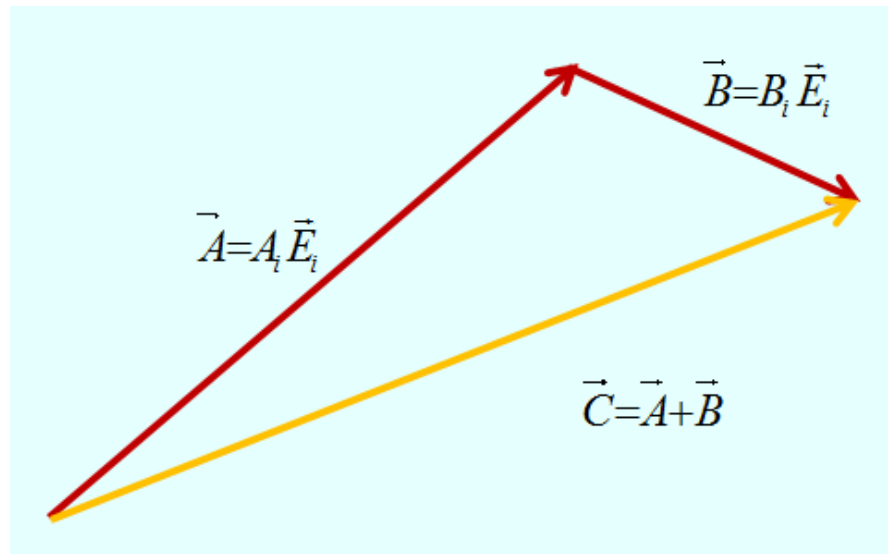
Ainsi que nous le constaterons ultérieurement, nous ferons beaucoup usage d'entités mathématiques dénommées tenseurs symétriques du second ordre. Les différentes composantes de ces tenseurs dans une base tridimensionnelle se présenteront sous forme d'une matrice carrée d'ordre 3 symétrique. Cette notion étant nouvelle pour beaucoup d'entre vous, il est nécessaire d'en donner des représentations graphiques pour aider à sa compréhension.

2.

Concrètement, c'est ce que nous avons fait lorsque nous avons associé un vecteur avec origine, intensité, direction et sens à une forme rectiligne terminée par une flèche.

Le vecteur étant en fait un tenseur du premier ordre, nous avons établi une bijection avec un élément graphique.

Cela nous a permis d'assimiler plus facilement la notion d'addition de ces tenseurs et de comprendre pourquoi le module d'un vecteur somme n'est pas la somme des modules des vecteurs constituants cette somme.



3.

Un tenseur du second ordre peut être donné par son représentant dans la base des vecteurs propres, ce représentant étant alors une matrice diagonale. Il est à noter que la base des vecteurs propres représente ce que l'on appellera les directions principales.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix} (\vec{N}_i)$$

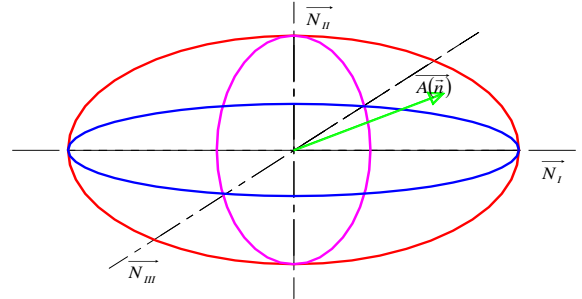
Par l'intermédiaire de cette application tensorielle, à chaque vecteur unitaire de l'espace $\vec{n} = n_i \vec{N}_i$, on peut associer un vecteur image $\overline{A(\vec{n})} = \mathbf{T} \vec{n}$ dont il est possible de calculer aisément les composantes dans la base

des vecteurs propres. $\overline{A(\vec{n})} = A_i \vec{N}_i$ et $\begin{cases} A_1 = T_I n_1 \\ A_2 = T_{II} n_2 \\ A_3 = T_{III} n_3 \end{cases}$

En prenant initialement un vecteur unitaire, on constate alors qu'il existe une relation entre les composantes du vecteur image $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 = \frac{A_1^2}{T_I^2} + \frac{A_2^2}{T_{II}^2} + \frac{A_3^2}{T_{III}^2}$.

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 = \frac{A_1^2}{T_I^2} + \frac{A_2^2}{T_{II}^2} + \frac{A_3^2}{T_{III}^2}$$

Avec cette relation, en considérant que les composantes du vecteur A représentent les coordonnées d'un point de l'espace, on constate que tous les points possibles se trouvent sur un ellipsoïde appelé ellipsoïde de Lamé.

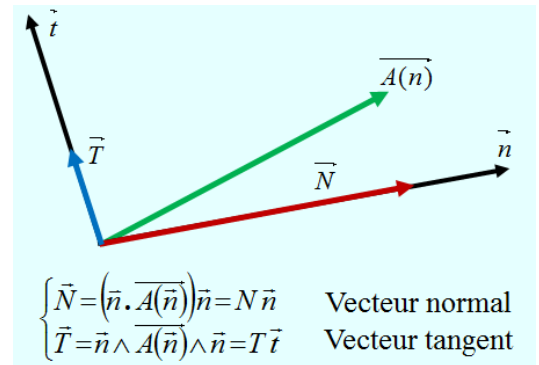


Cette première représentation graphique tridimensionnelle permet de constater que les valeurs propres représentent les valeurs extrémales de l'état tensoriel.

4.

Nous allons voir comment obtenir graphiquement la construction d'une ellipse définie par intersection de l'ellipsoïde avec un plan principal. Pour cela nous allons nous placer dans le plan formé par le vecteur unitaire d'étude et son vecteur image par l'application tensorielle.

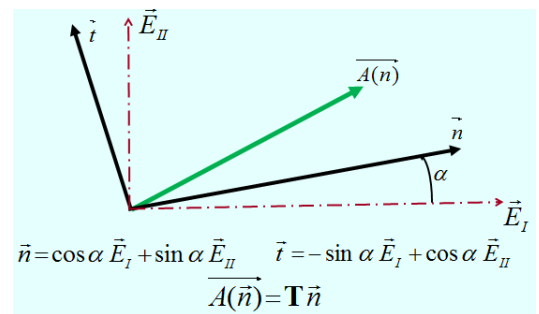
On désigne par N la projection du vecteur image sur le vecteur d'étude. La projection du vecteur image sur le plan orthogonal au vecteur d'étude nous donne un vecteur, appelé vecteur tangent, pour lequel nous pouvons associer un vecteur unitaire. A partir du vecteur unitaire d'étude et de son vecteur image, des relations permettent de calculer aisément le vecteur normal et le vecteur tangent.



5.

On considère un vecteur unitaire appartenant à un plan principal et formant un angle alpha avec une direction principale.

On peut calculer et définir son image par l'application tensorielle.



6.

Il est possible de donner les composantes de ce vecteur image dans la base des vecteurs propres.

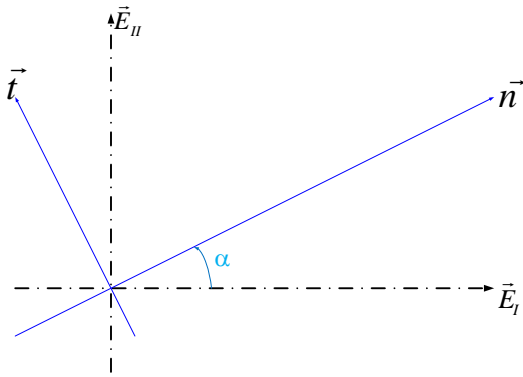
$$\vec{A}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 = T_I \cos \alpha \\ A_2 = T_{II} \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

7.

La construction graphique animée nous montre comment on peut construire pas à pas l'ellipse de Lamé. On commence par construire l'extrémité du vecteur image associé à un vecteur unitaire n appartenant à un plan principal. Puis, en faisant varier progressivement l'angle entre la direction principale et le vecteur unitaire normal, et en recommençant la construction, on constate que l'extrémité du vecteur image décrit une ellipse. On remarquera que pour cette représentation, les vecteurs propres gardent une direction fixe vis-à-vis de l'observateur.

8.

La représentation par ellipsoïde de Lamé est tridimensionnelle et donc peu facile à utiliser. Afin de remédier à cet inconvénient, nous allons utiliser une représentation plane. Avec les formules de changement de base on peut donner les nouvelles composantes dans la base formée par le vecteur normal et le vecteur qui lui est orthogonal et que nous appellerons vecteur tangent : $\vec{A}(\vec{n}) = A_1 \vec{E}_I + A_2 \vec{E}_{II} = a_n \vec{n} + a_t \vec{t}$



$$\begin{cases} \vec{E}_I = \cos(\alpha) \vec{n} - \sin(\alpha) \vec{t} \\ \vec{E}_{II} = \sin(\alpha) \vec{n} + \cos(\alpha) \vec{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = A_1 \cos(\alpha) + A_2 \sin(\alpha) \\ a_t = -A_1 \sin(\alpha) + A_2 \cos(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = T_I \cos \alpha \\ A_2 = T_{II} \sin \alpha \end{cases}$$

Et les formules de trigonométrie permettent de passer à l'angle double.

$$\begin{cases} a_n = T_I \cos^2 \alpha + T_{II} \sin^2 \alpha = \frac{T_I + T_{II}}{2} + \frac{T_I - T_{II}}{2} \cos(-2\alpha) \\ a_t = (T_{II} - T_I) \cos \alpha \sin \alpha = \frac{T_I - T_{II}}{2} \sin(-2\alpha) \end{cases}$$

9.

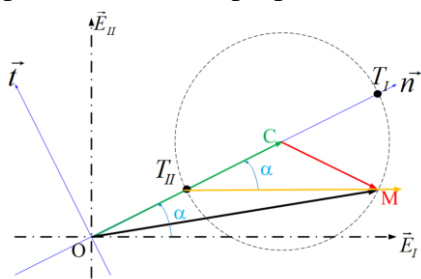
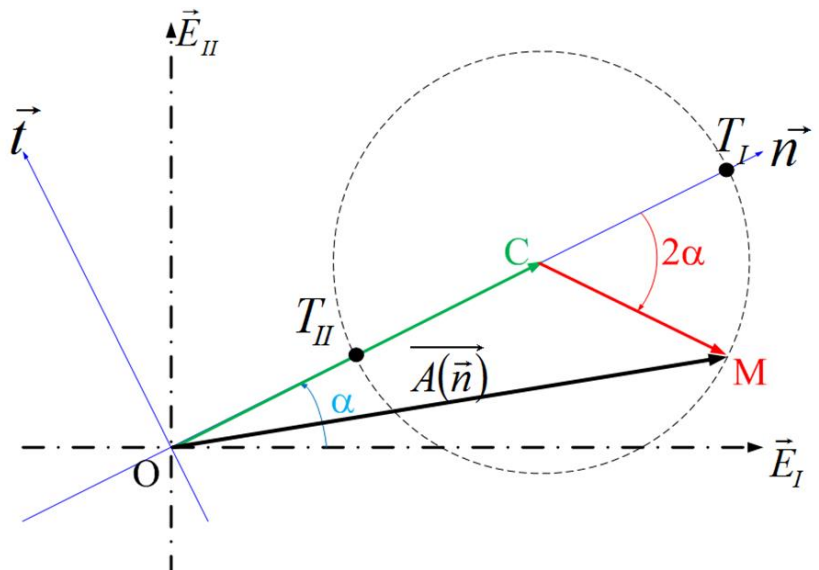
Commençons par positionner un repère plan avec une origine O et la base constituée par les vecteurs propres.

Dans ce plan on peut positionner les vecteurs n et t dont le positionnement angulaire est donné par l'angle alpha.

Sur l'axe normal, on peut repérer les deux points aux distances définies par les deux valeurs propres T_I et T_{II}. Le milieu de ces deux points nous détermine le point C tel que

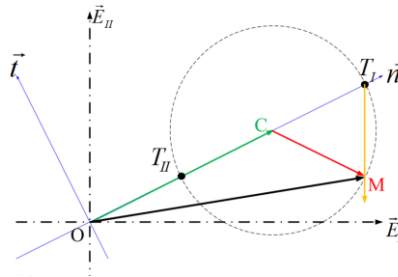
On peut maintenant représenter le vecteur CM de module (T_I - T_{II})/2 et formant un angle -2a avec l'axe normal

Le vecteur image A(n) étant la somme vectorielle des deux vecteurs précédents, on constate sans problème que lorsque l'angle alpha varie, le point M décrit un cercle dans le repère tournant associé aux vecteurs n et t. C'est le cercle de Mohr du plan des vecteurs propres.



A partir de cette construction, on constate que lorsque que l'on trace une droite joignant le point à valeur propre minimale T_{II} au point courant du cercle M associé à notre vecteur normal \vec{n} , on obtient un angle α avec cette normale. Cette droite est parallèle à la direction du vecteur propre maximal \vec{E}_I .

Et de façon duale, la droite qui joint T_I au point courant M nous donne propre minimal \vec{E}_{II} . On voit que le intrinsèque des indications sur les application tensorielle.



le point à valeur propre maximale une direction parallèle au vecteur cercle de Mohr contient de façon vecteurs propres de notre

10.

Comme pour l'ellipse de Lamé, ce cercle peut être obtenu en faisant varier progressivement l'angle entre la direction principale et le vecteur unitaire normal. En faisant une construction pas à pas, on constate que le point extrémité du vecteur image décrit un cercle dans le repère associé au vecteur normal et au vecteur tangent. Mais, contrairement à la construction de l'ellipse de Lamé, les directions principales sont en mouvement par rapport à l'observateur. En général, on représente le cercle de Mohr en plaçant l'axe normal n horizontal.

11.

Le plan contenant le vecteur unitaire normal et son vecteur image sera appelé le plan de Mohr.

Si le vecteur unitaire normal appartient à un plan principal, l'extrémité du vecteur image est situé sur un cercle dont le centre est sur l'axe normal et dont les points intersections avec l'axe normal ont des abscisses égales aux valeurs propres associées aux vecteurs propres du plan principal.

Comme nous avons en général trois valeurs propres distinctes, on obtient un ensemble de trois cercles appelé tri cercle de Mohr.

12.

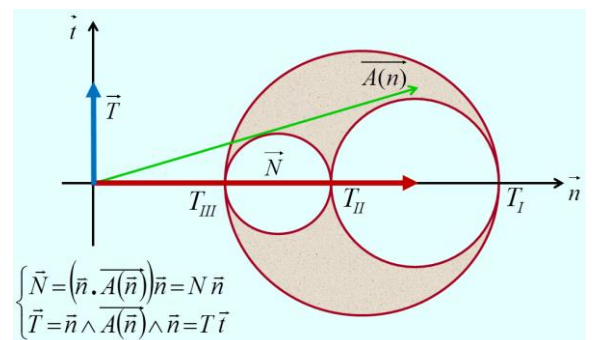
On démontre que si le vecteur normal \vec{n} appartient à aucun des plans principaux, l'extrémité du vecteur image est à l'intérieur du tricerle de Mohr.

Les projections du vecteur image sur les vecteurs de base du plan de Mohr nous donnent le vecteur normal et le vecteur tangent.

13.

Avec cette figure, on constate que la plus grande valeur du vecteur normal est égale à la valeur propre la plus grande, la plus petite valeur est celle de la valeur propre la plus faible.

Enfin la plus grande valeur du vecteur tangent est égale au rayon du plus grand des cercles, soit la demi différence entre la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre.



14.

Dans cette leçon, nous avons vu comment, en partant d'une représentation d'un tenseur de second ordre sous forme d'une matrice diagonale donnant les valeurs propres dans les directions principales, nous pouvons associer à notre application tensorielle deux représentations graphiques. L'une conduit à une forme

tridimensionnelle appelée ellipsoïde de Lamé, l'autre conduit à une forme bidimensionnelle dénommée tricercles de Mohr. Dans la leçon suivante, nous allons pouvoir utiliser les cercles de Mohr pour le tenseur quadratique associé à une section plane.

1-3 DESCRIPTIONS

Applications

1.

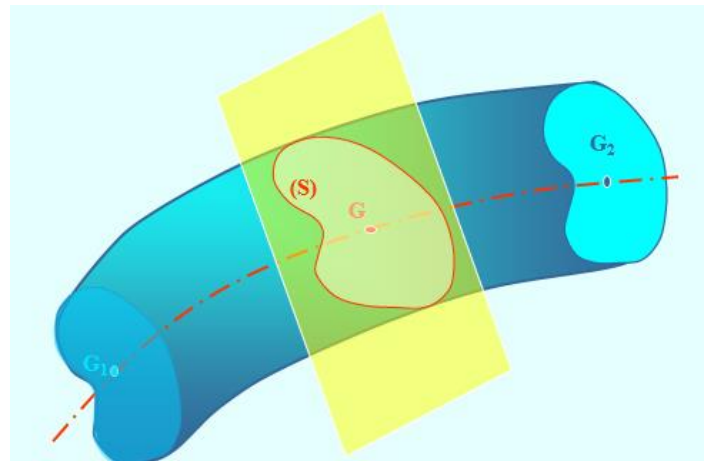
Avec cette présentation, nous allons, sous forme d'exercice mettre en application la notion de repère et voir comment la représentation de Mohr permet dans certains cas d'obtenir graphiquement les valeurs propres et les vecteurs propres d'un tenseur du second ordre. Pour cela nous allons utiliser les propriétés caractéristiques d'une section plane.

2.

Parmi les solides déformables que nous pourrions étudier ultérieurement, les poutres vont jouer un rôle particulier. Géométriquement elles se présentent sous forme d'un domaine tridimensionnel mais l'une des dimensions est plus grande que les deux autres.

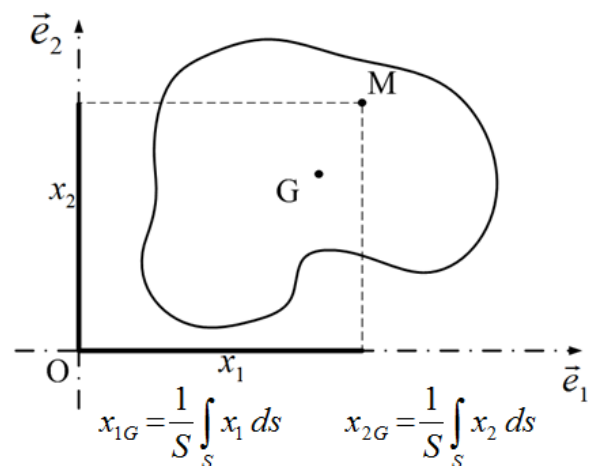
Concrètement, pour générer ce domaine, il faut se donner une forme géométrique dans un plan. A cette forme nous associerons son isobarycentre G.

Puis en promenant l'ensemble le long d'une courbe dans l'espace, on décrira notre poutre délimitée par une section origine et une section extrémité.



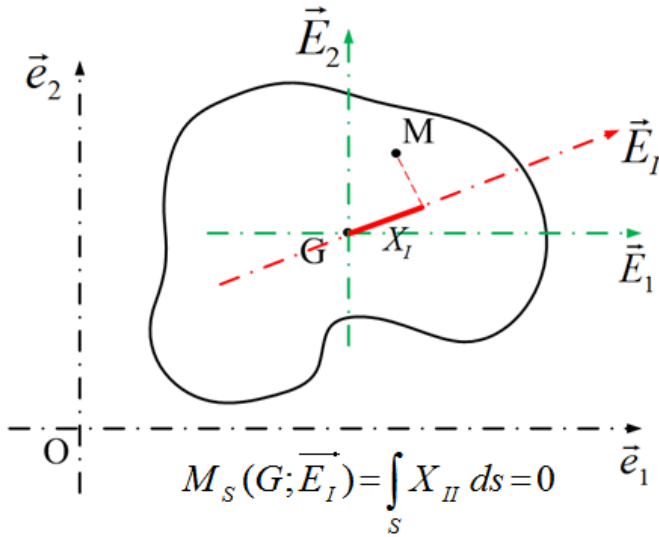
3.

En se plaçant dans le plan de définition de notre section déterminée par son contour, il convient de positionner l'isobarycentre. Ce dernier est défini par une intégrale portant sur toute la section avec l'élément de surface pour variable et le vecteur position pour intégrande. Cette définition permet de d'obtenir notre isobarycentre de façon intrinsèque à la surface c'est-à-dire dans son référentiel, mais dans la pratique il sera nécessaire d'utiliser un repère avec une origine 0 et des axes. En utilisant la relation de Chasle, on peut facilement déterminer le vecteur position de l'isobarycentre dans ce repère. Le vecteur position d'un point M courant de notre section plane est connu dans ce repère par ses composantes. A partir de ces vecteurs, on peut écrire les coordonnées scalaires de positionnement de l'isobarycentre dans le repère.



4.

Les grandeurs intégrales que nous venons d'obtenir représentent les deux moments statiques de notre section plane dans le repère d'origine O. Ces moments statiques sont associés aux vecteurs de base, mais aussi au point origine du repère.



En changeant simplement d'origine, on obtient de nouvelles valeurs. Il est à noter que si l'on fait le calcul en prenant l'isobarycentre comme origine, le moment statique est nul.

Le plus remarquable est que ce résultat est valable quel que soit l'orientation de l'axe passant l'isobarycentre. On peut définir l'isobarycentre en disant que c'est le point du plan pour lequel tous les moments statiques sont nuls.

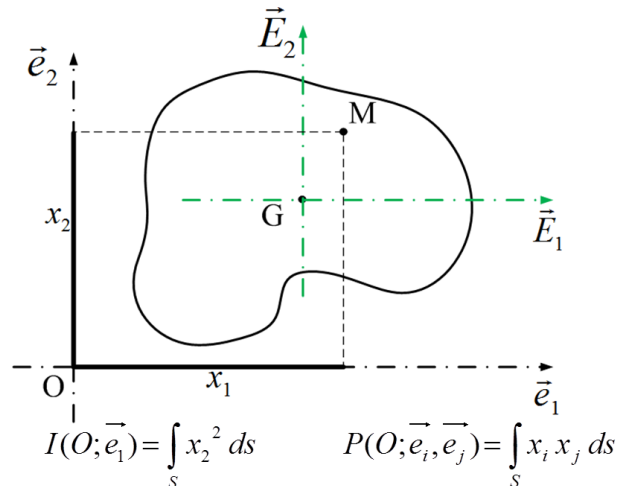
5.

Dans l'étude de la déformation des poutres, il sera aussi nécessaire d'utiliser les notions de moments quadratiques qui sont des intégrales du même type, l'intégrante étant des distances élevées au carré.

$$I(O; \vec{e}_1) = \int_S x_2^2 ds$$

Et l'on utilisera aussi les produits quadratiques, intégrales obtenues avec le produit des coordonnées comme intégrante. Il est à noter que pour une section plane symétrique par rapport à l'un des axes, le produit quadratique est nul.

$$P(O; \vec{e}_i, \vec{e}_j) = \int_S x_i x_j ds$$



6.

A partir des résultats précédents, il est possible d'envisager un changement de repère obtenu par simple changement d'origine. Connaissant le moment quadratique pour un axe passant par une origine O quelconque, on veut calculer le moment quadratique pour la même orientation d'axe mais passant par l'isobarycentre.

Pour cela, il suffit d'utiliser les formules de changement de repère par translation. $x_i = x_{iG} + X_i$

Il suffit alors de développer le calcul d'intégrale. Dans le dernier membre de l'égalité, la première intégrale nous donne l'aire de notre section plane, la seconde représentant un moment statique pour un axe passant par l'isobarycentre est nulle, et enfin la troisième représente le moment quadratique pour l'axe passant par l'isobarycentre.

$$I(O; \vec{e}_1) = \int_S (x_{2G} + X_2)^2 ds = x_{2G}^2 \int_S ds + 2 x_{2G} \int_S X_2 ds + \int_S X_2^2 ds$$

Au final, on obtient une formule traduisant le théorème de changement d'origine dit de Huygens. Attention, cette formule n'est valable que si le second point est l'isobarycentre. Elle ne peut pas être utilisée

directement entre deux points quelconques du plan. Avec cette relation de Huygens, on constate que pour une direction donnée, le moment quadratique sera minimal pour l'axe passant par l'isobarycentre.

$$I(O; \vec{e}_1) = x_{2G}^2 S + I(G; \vec{e}_1)$$

7.

Après un changement de repère par translation on peut s'interroger sur les relations existantes dans le cas d'un changement de repère par rotation. Nous allons faire l'application en prenant l'isobarycentre pour origine des deux repères.

On écrit le vecteur position dans les deux repères. Pour avoir les relations de changement de coordonnée, il faut appliquer les formules de changement sur les vecteurs de base.

En nous pouvons ainsi exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.

$$\begin{cases} X_I = X_1 \cos \alpha + X_2 \sin \alpha \\ X_{II} = -X_1 \sin \alpha + X_2 \cos \alpha \end{cases}$$

Relations très utiles pour exprimer les moments quadratiques et le produit quadratique du nouveau repère en fonction des anciennes coordonnées. Ce qui nous permet de relier les moments quadratiques et produits quadratiques entre eux.

$$\begin{aligned} I(G; \vec{E}_I) &= (\cos \alpha)^2 I(G; \vec{E}_1) - 2 \cos \alpha \sin \alpha P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2) + (\sin \alpha)^2 I(G; \vec{E}_2) \\ P(G; \vec{E}_I, \vec{E}_{II}) &= \cos \alpha \sin \alpha (I(G; \vec{E}_1) - I(G; \vec{E}_2)) + [(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2] P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2) \end{aligned}$$

8.

Les relations précédentes peuvent être avantageusement résumées avec une formulation matricielle avec des notations abrégées évidentes.

$$\begin{pmatrix} I_I & -P_{I,II} \\ -P_{I,II} & I_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -P_{1,2} \\ -P_{1,2} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

On voit ainsi apparaître une application tensorielle du second représentée par le tenseur quadratique qui admet différents représentants selon la base d'étude.

$$\overline{\overline{I(G)}} = \begin{pmatrix} I_I & -P_{I,II} \\ -P_{I,II} & I_{II} \end{pmatrix} (\vec{E}_I, \vec{E}_{II}) = \begin{pmatrix} I_1 & -P_{1,2} \\ -P_{1,2} & I_2 \end{pmatrix} (\vec{E}_1, \vec{E}_2)$$

Par changement de base, on peut obtenir un représentant matriciel diagonal.

$$\overline{\overline{I(G)}} = \begin{pmatrix} I_I & 0 \\ 0 & I_{II} \end{pmatrix} (\vec{N}_I, \vec{N}_{II})$$

Pour connaître les vecteurs propres et directions principales il suffit d'annuler l'expression donnant le produit quadratique en fonction de l'angle de changement de base.

$$P(G; \vec{E}_I, \vec{E}_{II}) = \cos \alpha \sin \alpha (I(G; \vec{E}_1) - I(G; \vec{E}_2)) + [(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2] P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2)$$

$$P(G; \vec{E}_I, \vec{E}_{II}) = \frac{\sin 2\alpha}{2} (I(G; \vec{E}_1) - I(G; \vec{E}_2)) + \cos 2\alpha P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2)$$

Après être passé par l'angle double, on peut obtenir le positionnement des vecteurs propres.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 P(G; \vec{E}_1, \vec{E}_2)}{I(G; \vec{E}_1) - I(G; \vec{E}_2)}$$

9.

Il est possible de retrouver ce résultat à partir de la représentation graphique de Mohr. Pour cela on va considérer le représentant matriciel du tenseur dans la base initiale.

$$\overline{\overline{I(G)}} = \begin{pmatrix} I_1 & -P_{1,2} \\ -P_{1,2} & I_2 \end{pmatrix} (\overline{\vec{E}_1}, \overline{\vec{E}_2})$$

Avec cette expression tensorielle, on peut calculer les vecteurs images de nos deux vecteurs de bases.

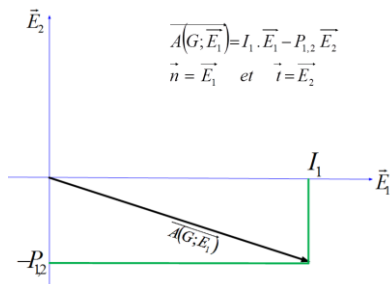
$$\overline{A(G; \vec{E}_i)} = \overline{\overline{I(G)}} \cdot \vec{E}_i$$

Pour faire le calcul, il faut que le représentant matriciel du tenseur et le représentant matriciel du vecteur soient exprimés dans la même base.

$$\overline{A(G; \vec{E}_1)} = I_1 \cdot \vec{E}_1 - P_{1,2} \vec{E}_2$$

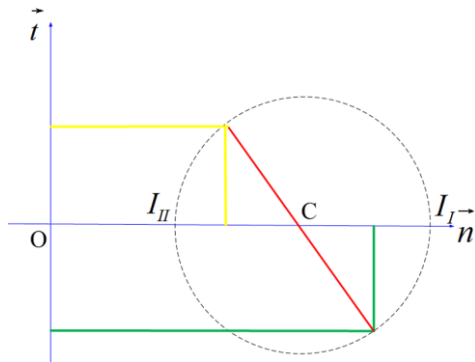
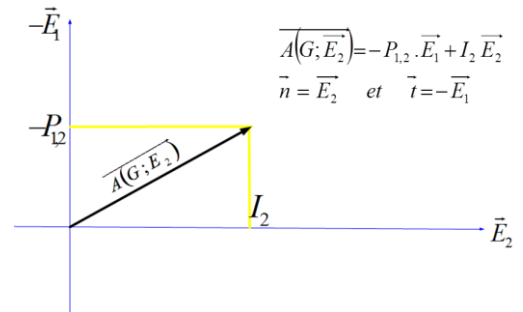
Pour représenter graphiquement ces vecteurs nous allons nous placer dans le plan de Mohr déterminé par le vecteur normal et le vecteur tangent.

$$\overline{A(G; \vec{E}_2)} = -P_{1,2} \cdot \vec{E}_1 + I_2 \vec{E}_2$$



Dans le cas du vecteur image du premier vecteur de base, le vecteur normal est justement ce vecteur de base. Tout naturellement nous prendrons le deuxième vecteur de base pour le vecteur tangent ce qui nous permet de dessiner le vecteur image dans le plan de Mohr.

Pour le vecteur image du deuxième vecteur de base, il faut faire une rotation de 90° de la base précédente pour que le vecteur normal du plan de Mohr soit porté par le deuxième vecteur de la base. De fait le premier vecteur de la base est opposé au vecteur tangent.



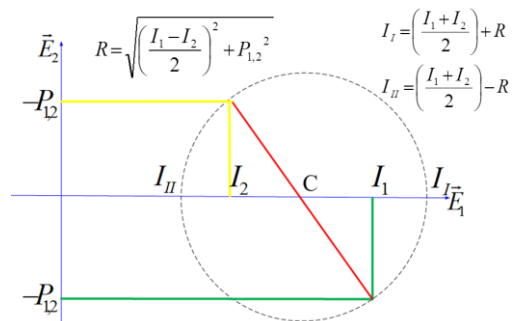
Les extrémités des deux vecteurs images nous donnent deux points qui se trouvent sur le cercle de Mohr. Pour obtenir le centre de ce dernier, il faut trouver l'intersection de la médiatrice des deux points avec l'axe horizontal du repère car le centre est situé à égale distance des deux points et sur l'axe normal. Mais en fait on constate que ce centre est aussi le milieu des points dans le cas de notre exemple.

On peut tracer le cercle de Mohr qui par intersection avec l'axe normal nous donne les deux valeurs propres.

10.

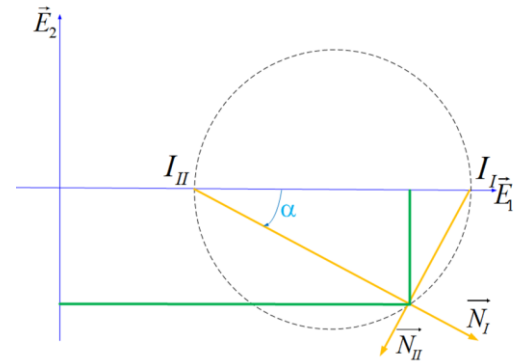
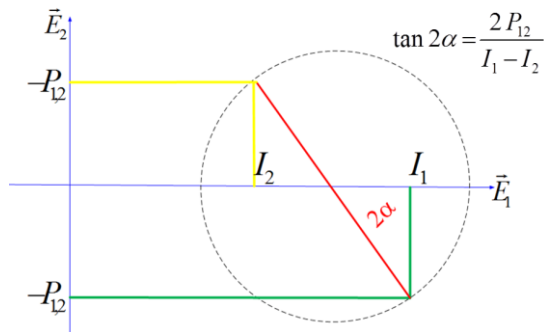
Pour obtenir ces dernières, il faut, en utilisant le théorème de Pythagore, calculer le rayon du cercle.

Les valeurs propres sont égales à la distance positionnant le centre du cercle de Mohr à laquelle on ajoute ou on retranche la valeur du rayon.



Enfin nous avons vu que si l'on traçait la droite passant par le point de valeur propre minimale et le point courant du cercle associé par exemple au premier vecteur de base, on obtenait dans notre base une direction portée par le vecteur propre maximal.

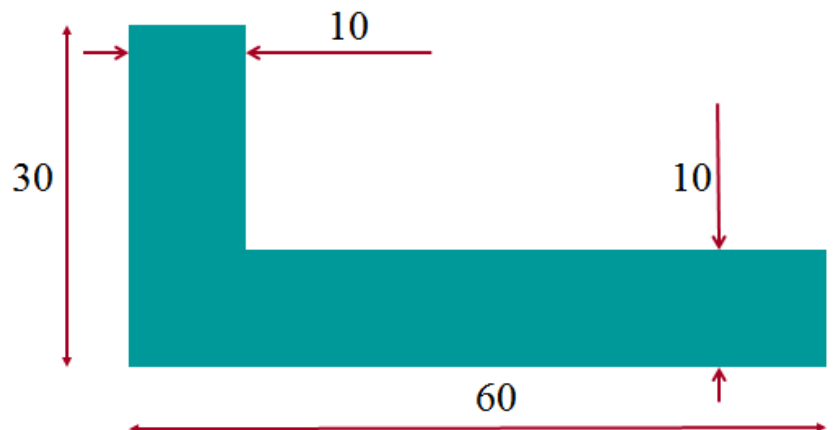
Et de façon duale, la droite qui passe par le point de valeur propre maximale et le point courant nous donne une direction portée par le vecteur propre minimal.



Avec cette dernière figure reprenant les résultats précédents, on peut obtenir facilement le double de l'angle formé entre les vecteurs de base et les vecteurs propres.

11.

En relation de ce qui vient d'être fait, l'auditeur est invité à positionner le barycentre et à définir les valeurs propres et vecteurs propres pour la section plane représentée.



12.

En conclusion, avec cette application sur les grandeurs caractéristique d'une surface plane, nous avons pu constater l'intérêt de définir plusieurs repères pour décrire un même objet. Nous avons travaillé avec la notion de tenseur du second ordre dans un espace vectoriel à deux dimensions. Enfin la construction graphique à partir du cercle de Mohr nous a été utile pour obtenir aussi bien les valeurs propres que les vecteurs propres de notre application tensorielle.

DEFORMATIONS

Grandes déformations

1.

On peut aborder la mécanique des milieux continus soit par le coté cinématique, avec les déplacements et les déformations, soit par le coté statique, avec les forces et les contraintes. Comme nous allons le constater, bien qu'étant indépendantes, ces deux visions présentent de nombreux points communs et une grande dualité. Toutefois, l'aspect cinématique nous permettant d'aborder la notion de tenseurs sous une forme plus physique et plus facilement compréhensible par l'étudiant, c'est par cette approche que nous allons commencer notre présentation.

2.

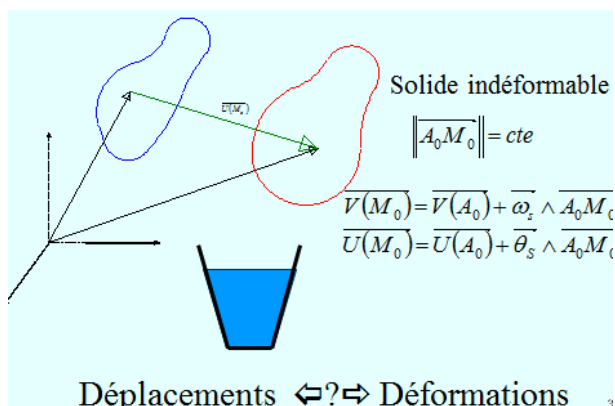
En bon mécanicien, nous allons prendre dans notre caisse à outils les éléments indispensables pour travailler ce chapitre. Ils ne sont pas très nombreux.

Nous aurons besoin de trois clous afin de bien positionner les points d'étude dans notre domaine. Et pour les planter, nous prendrons un marteau. Par mesure de prudence vis-à-vis de nos doigts, les clous seront assez gros et le marteau assez petit. Enfin il nous faut deux élastiques. Ils seront tendus entre deux clous. Mais attention, ce sont des élastiques avec des propriétés très particulières. Ils doivent être infiniment petits et infiniment étirables. Afin de vous rassurer un peu, il est bon d'indiquer que tous ces outils, marteau compris, peuvent être parfaitement virtuels. Il faudra alors simplement faire marcher un peu plus l'imagination.



3.

Nous allons essayer de trouver des liens entre la notion de déplacement et celle des déformations.



En premier lieu, il convient de bien réaliser que nous pouvons tout à fait déplacer un domaine matériel sans pour autant avoir engendré des déformations au sein de ce domaine. La mécanique des solides indéformables est là pour nous le rappeler. La distance entre deux points étant une constante, le champ des vitesses est un champ de torseur. Et, dans le cas de très petits déplacements, on obtient aussi un champ de torseur pour les déplacements, champ caractérisé par une résultante et un moment en un point.

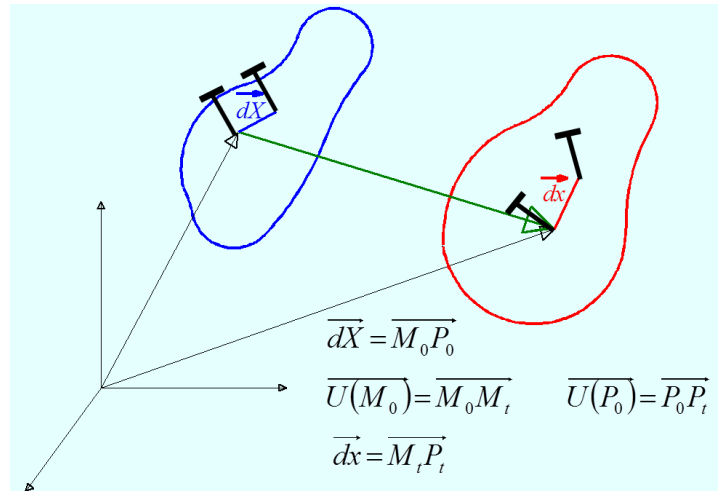
On peut noter que le domaine peut fort bien être un domaine fluide par exemple contenu dans un seau auquel on fait suivre une trajectoire rectiligne à une vitesse uniforme. Nous n'avons toujours pas créé de déformation.

Il faut donc trouver dans le champ de déplacement les propriétés qui vont permettre d'engendrer des déformations. Et le problème est complexe, car, comme nous allons le constater, il peut exister de multiples déformations en chaque point de l'espace, alors que pour chaque point le vecteur déplacement est unique. La notion de déformation ne peut pas être simplement représentée par un vecteur et nous devons employer une nouvelle entité, le tenseur, pour la définir.

4.

Pour déterminer physiquement l'état de déformation en un point M_0 , nous allons le positionner dans la configuration de référence.

Ensuite, nous considérons, toujours dans la configuration de référence un nouveau point P_0 , infiniment proche du point précédent. Avec notre gros marteau, sans nous faire mal, nous plantons un clou en chacun de ces points. Ces clous vont servir d'attaches à un élastique tendu entre les deux points M_0 et P_0 . On obtient ainsi le vecteur $\overline{dX} = \overline{M_0P_0}$ qui est défini dans la configuration de référence. Puis nous transformons notre domaine en lui imposant un champ de déplacement. Dans la configuration actuelle, déterminée à l'instant t , on trouve les points images des précédents, à savoir les points M_t et P_t . Pour le point M_0 , son vecteur déplacement est $\overline{U(M_0)} = \overline{M_0M_t}$. De même pour le point P_0 $\overline{U(P_0)} = \overline{P_0P_t}$. Donc, dans la configuration actuelle, on peut déterminer la position de notre élastique par le vecteur $\overline{dx} = \overline{M_tP_t}$

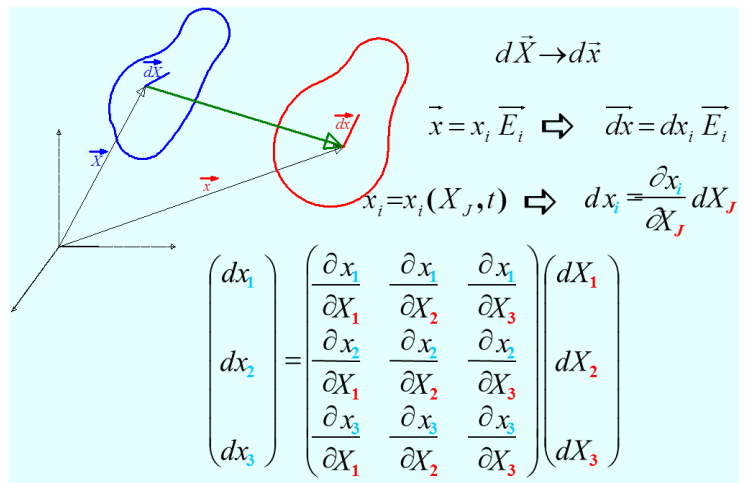


5.

Nous voulons donc maintenant rechercher les liens entre le vecteur initial \overline{dX} pris dans la configuration de référence et son image par le champ de déplacement dans la configuration actuelle soit le vecteur \overline{dx} .

Pour cela nous allons tout simplement différentier dans l'espace le vecteur position actuelle. En prenant comme hypothèse que ce dernier est connu par ses composantes dans un repère cartésien $\vec{x} = x_i \vec{E}_i$ et que dans ce cas les vecteurs de base sont invariants, le vecteur image \overline{dx} sera obtenu tout simplement en différenciant les composantes $\overline{dx} = dx_i \vec{E}_i$

Ces dernières sont dépendantes de la position initiale du point d'étude et l'on a une forme



différentielle spatiale qui est donnée en considérant les variations vis-à-vis des variables de position initiales, c'est-à-dire en considérant la différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Par convention, les indices majuscules sont liés à la configuration de référence et les indices minuscules sont liés à la configuration actuelle.

Cette dernière relation indicielle peut encore être présentée sous forme matricielle.

6.

La matrice que l'on vient de faire apparaître représente dans notre base les composantes d'un tenseur noté **F** et dénommé **Tenseur gradient** ou encore **Application linéaire tangente**. Il permet de calculer notre vecteur image connaissant le vecteur dans la configuration initiale.

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}$$

Il est aussi possible de partir de la relation inverse.

$$dX_I = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} dx_j \quad F^{-1}_{Ij} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} \quad d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x}$$

Et nous pouvons aussi relier ce tenseur à notre champ de déplacement. Pour cela, il suffit d'écrire que le vecteur déplacement est la différence entre le vecteur position dans la configuration actuelle et le vecteur position dans la configuration de référence.

$$\vec{u}(X_j, t) = \vec{OM}_t - \vec{OM}_0 = \vec{x} - \vec{X}$$

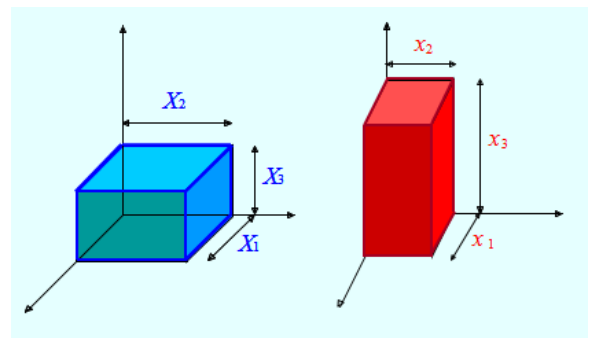
On fait alors apparaître une nouvelle entité qui est le tenseur gradient du vecteur déplacement.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{Grad} \vec{U}$$

7.

Afin de fixer un peu les idées nous allons regarder comment on peut calculer les composantes du tenseur gradient dans le cas d'une transformation très simple : la déformation homogène triaxiale.

Pour cette déformation, un parallélépipède rectangle construit selon les axes des vecteurs de base se transforme en un nouveau parallélépipède rectangle.



8.

Les équations de cette transformation sont très simples. Elles traduisent une proportionnalité entre les coordonnées actuelles et les coordonnées de référence.

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 X_1 \\ x_2 = \lambda_2 X_2 \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases}$$

Par simple dérivation des coordonnées actuelles, on peut obtenir les composantes du tenseur gradient. Ce dernier prend une forme diagonale.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

En faisant l'hypothèse que le volume dans la configuration de référence est unitaire, le volume dans la configuration actuelle est donné par le produit des valeurs du tenseur.

$$dv_0 = 1 \Rightarrow dv = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 dv_0$$

Il correspond aussi au déterminant de la matrice. Ce résultat, constaté sur cet exemple, sera généralisable. Le déterminant du tenseur gradient donne la variation relative de volume dans notre transformation.

$$dv = J dv_0 \quad J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det \mathbf{F}$$

9.

On constate que le tenseur gradient ne peut pas être représentatif de l'état de déformation. Pour un solide sans déformation, il est non nul.

Solide indéformable, si transformation infinitésimale :

$$\overline{U(M_0)} = \overline{U(A_0)} + \overline{\theta_s} \wedge \overline{A_0 M_0}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{A1} \\ u_{A2} \\ u_{A3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_{S1} \\ \theta_{S2} \\ \theta_{S3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 - X_{A1} \\ X_2 - X_{A2} \\ X_3 - X_{A3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{A1} + \theta_{S2}(X_3 - X_{A3}) - \theta_{S3}(X_2 - X_{A2}) \\ u_{A2} + \theta_{S3}(X_1 - X_{A1}) - \theta_{S1}(X_3 - X_{A3}) \\ u_{A3} + \theta_{S1}(X_2 - X_{A2}) - \theta_{S2}(X_1 - X_{A1}) \end{pmatrix}$$

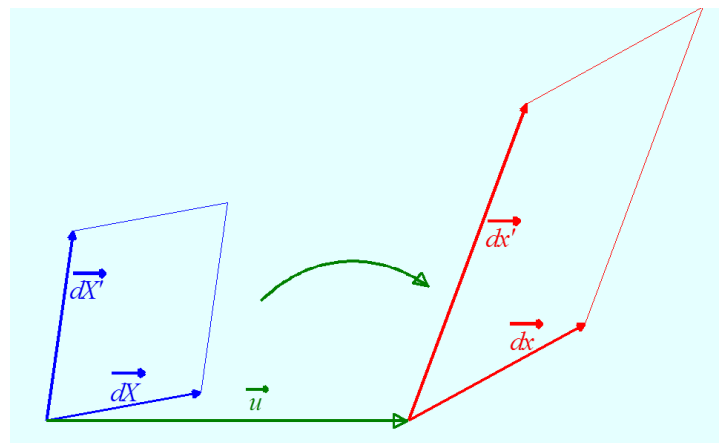
$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_{S3} & \theta_{S2} \\ \theta_{S3} & 1 & -\theta_{S1} \\ -\theta_{S2} & \theta_{S1} & 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

$\det \mathbf{F} \approx 1$

10.

Pour caractériser les déformations, il faut traduire le fait que les distances entre deux points et les angles entre deux directions vont changer lors de la transformation. Pour cela nous allons utiliser le produit scalaire de deux vecteurs qui est fonction à la fois de la norme de ces vecteurs, donc des distances entre deux points, et de l'angle formé entre ces vecteurs.

Nous considérons deux vecteurs pris dans la configuration de référence. Afin de bien les repérer, nous plantons des clous aux extrémités des vecteurs et nous tendons des élastiques entre deux clous. Nous imposons ensuite le champ de déplacement à notre domaine. Nos clous et élastiques vont alors se positionner dans la configuration actuelle. Les nouveaux vecteurs dans la configuration actuelle sont symbolisés par la position des clous. Les variations de longueur des élastiques permettent de visualiser les élongations. On peut aussi visionner la variation de l'angle initialement formé entre les deux vecteurs.



11.

Avec le tenseur gradient, nous avons vu que nous pouvons calculer des vecteurs images à partir de vecteurs définis dans la configuration de référence.

Le produit scalaire de deux vecteurs est obtenu sous forme matricielle en transposant le représentant du premier vecteur.

$$d\vec{x}^T \cdot d\vec{x}' = (\mathbf{F} d\vec{X})^T \cdot \mathbf{F} d\vec{X}'$$

En développant le calcul, on voit alors apparaître une nouvelle matrice, représentant d'un tenseur appelé le Tenseur de Cauchy Green droit.

$$d\vec{x}^T \cdot d\vec{x}' = (d\vec{X})^T \mathbf{F}^T \bar{\otimes} \mathbf{F} d\vec{X}' = (d\vec{X})^T \mathbf{C} d\vec{X}'$$

Il est obtenu en faisant le produit du tenseur gradient transposé avec le tenseur gradient.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \bar{\otimes} \mathbf{F}$$

12.

La forme développée du calcul matriciel montre bien la nécessité de transposer le premier vecteur si l'on veut obtenir une fonction scalaire.

$$d\vec{x}^T \cdot d\vec{x}' = (d\vec{X})^T \mathbf{C} d\vec{X}' = \begin{pmatrix} dX_1 & dX_2 & dX_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX'_1 \\ dX'_2 \\ dX'_3 \end{pmatrix}$$

Le calcul des composantes indicielles montre que le tenseur obtenu est symétrique.

$$C_{JK} = F_{iJ} F_{iK} = F_{Ji} F_{iK}$$

Il peut être calculé directement à partir du champ de déplacement et du tenseur gradient du déplacement. En transposant la dernière expression, on obtient le même résultat, ce qui prouve à nouveau la symétrie du tenseur de Cauchy Green droit.

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T \bar{\otimes} \mathbf{Grad} \vec{U}$$

13.

Ayant maintenant tous les outils nécessaires, on peut envisager de calculer la variation de notre produit scalaire lors de la transformation.

Cela nous permet de mettre en lumière un nouveau tenseur appelé tenseur de Green Lagrange. C'est aussi un tenseur symétrique.

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2d\vec{X} \cdot \mathbf{E} d\vec{X}'$$

Son expression est donnée par une formulation tensorielle.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}[\mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T \bar{\otimes} \mathbf{Grad} \vec{U}]$$

Ses composantes dans une base seront calculées à partir de formulation indicielle.

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(F_{kI} F_{kJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \right)$$

14.

Reprenons l'exemple de la déformation homogène triaxiale pour laquelle nous avons déjà identifié le tenseur gradient.

Avec la formule $\mathbf{C} = {}^t \mathbf{F} \bar{\otimes} \mathbf{F}$, on peut facilement calculer les composantes du tenseur de Cauchy Green droit qui est alors un tenseur diagonal.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Puis la formule $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ nous permet d'avoir les composantes du tenseur de Green Lagrange.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

15.

Avec les outils précédents, nous pouvons maintenant nous permettre de définir des grandeurs physiques mesurables.

Commençons par positionner dans la configuration de référence au point d'étude un vecteur infiniment petit \vec{dX} auquel on associe sa longueur dX .

On définit son vecteur image par le champ de déplacement. $\|\vec{n}\| = 1$. On peut remarquer que la direction de ce dernier n'est pas nécessairement identique à la direction du vecteur initial. $\vec{n} \neq \vec{N}$

La dilatation linéaire, ou l'allongement, est défini comme étant la variation relative de longueur du vecteur initial. Elle est dépendante du point d'étude et de la direction dans laquelle on fait la mesure.

$$\varepsilon(\vec{N}) = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

On peut la calculer soit à partir du tenseur de Cauchy Green droit, soit à partir du tenseur de Green Lagrange.

$$\varepsilon(M_0; \vec{N}) = \frac{dx - dX}{dX} = \sqrt{\vec{N} \mathbf{C} \vec{N}} - 1 = \sqrt{\vec{N} (\mathbf{I} + 2 \mathbf{E}) \vec{N}} - 1$$

On peut aussi calculer la dilatation linéaire dans des directions particulières. On constate par exemple que les premières composantes des tenseurs de Cauchy Green droit et de Green Lagrange sont liées à la direction \vec{E}_1 .

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_1) = \sqrt{\vec{E}_1 \mathbf{C} \vec{E}_1} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1$$

16.

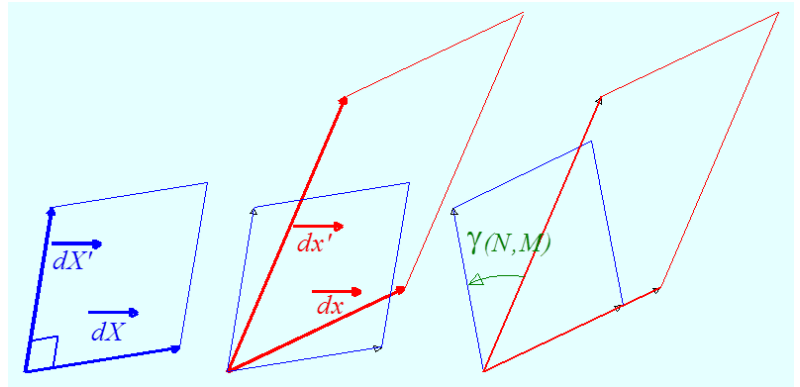
La détermination des dilatations linéaires n'est pas suffisante pour caractériser l'état de déformation d'un domaine. Il faut aussi être capable de calculer les variations d'angles.

Pour cela nous considérons deux directions définies dans la configuration de référence que nous allons suivre lors de la transformation.

Afin d'établir une norme initiale, nous imposons à nos deux directions d'avoir un angle droit dans la configuration de référence, puis nous regardons qu'elle est la variation de cet angle dans la configuration actuelle.

Cette variation détermine alors la distorsion angulaire ou le glissement. Cette distorsion angulaire est dépendante du point d'étude et des directions orthogonales initialement choisies.

$$\gamma(M_0; \vec{N}, \vec{M}) = \frac{\pi}{2} - (\hat{n}, \hat{m})$$



Le produit scalaire de deux vecteurs étant dépendant du cosinus de l'angle formé entre ces deux vecteurs, soit encore du sinus de l'angle complémentaire, on peut envisager de déterminer la distorsion angulaire par le calcul du produit scalaire des vecteurs dans la configuration actuelle.

$$\cos(\hat{d}\hat{x}, \hat{d}\hat{x}') = \frac{d\hat{x}d\hat{x}'}{dx dx'} = \sin \gamma$$

Le résultat peut être relié soit au tenseur de Cauchy Green droit, soit au tenseur de Green Lagrange.

$$\gamma(M_0; \vec{N}, \vec{M}) = \text{Arc sin} \left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{C} \vec{M}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{C} \vec{N}} \sqrt{\vec{M} \cdot \vec{C} \vec{M}}} \right) = \text{Arc sin} \left(\frac{2\vec{N} \cdot \vec{E} \vec{M}}{(1 + \varepsilon(\vec{N})) (1 + \varepsilon(\vec{M}))} \right)$$

Et l'on peut constater en prenant des vecteurs de notre base que l'on a un lien direct avec les composantes des tenseurs.

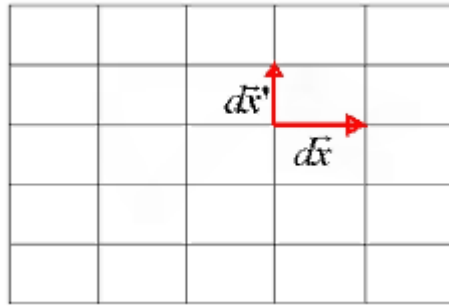
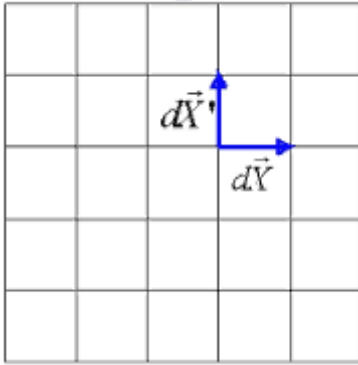
$$\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = \text{Arc sin} \left(\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{22}}} \right) = \text{Arc sin} \left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}} \right)$$

17.

Pour illustrer le calcul des composantes du tenseur de Green Lagrange, nous allons reprendre l'exemple de la déformation homogène triaxiale.

18.

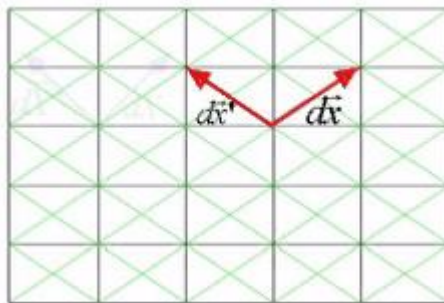
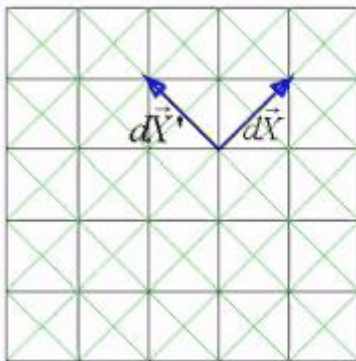
Elle consiste donc à étirer ou raccourcir un parallépipède rectangle dans les trois directions formées par les arêtes. Etudions un plan particulier. Dans la configuration de référence, nous positionnons en un point courant un vecteur horizontal et un autre vecteur vertical. Puis nous imposons la déformation à notre domaine. Les extrémités de nos vecteurs sont attachées à des points et suivent les vecteurs déplacements de ces points. Dans la configuration actuelle, nous retrouvons donc nos vecteurs avec des variations par rapport à la configuration de référence. En étudiant ces variations, on peut mesurer d'une part la variation relative de longueur, d'autre part la variation de l'angle formé initialement par nos vecteurs, variation qui en l'occurrence est nulle. Avec ces informations, on peut en déduire certaines composantes de notre tenseur de Green Lagrange.



$$\begin{aligned} dx &= 1,25 d\bar{X} & dx' &= 0,83 d\bar{X}' \\ d\bar{X}' \cdot dx - d\bar{X}' \cdot d\bar{X} &= 0 \\ \bar{\mathbb{E}} &= \begin{pmatrix} 0,28 & 0 \\ 0 & -0,15 \end{pmatrix} (\bar{E}_i) \end{aligned}$$

19.

Reprenons l'exemple précédent, mais cette fois, au lieu de travailler dans des directions parallèles aux arêtes nous allons travailler selon des directions orientées à 45°. Nous imposerons la même déformation à notre domaine. Dans notre plan particulier, les axes d'étude seront donc définis par une rotation de 45° par rapport à nos axes précédents. En un point d'étude, nous indiquons deux vecteurs orthogonaux dans la configuration de référence, puis nous imposons notre déformation. On voit aisément que cette fois l'angle formé entre les deux vecteurs change, alors qu'ils subissent le même allongement. Les composantes du tenseur de Green Lagrange ne sont plus les mêmes bien que l'on traduise le même état de déformation. Dans la base avec des vecteurs parallèles aux arêtes, la matrice représentant le tenseur était diagonale. On dit alors que nous sommes dans les directions principales de déformation.



$$\begin{aligned} dx &= 1,06 d\bar{X} & dx' &= 1,06 d\bar{X}' \\ d\bar{X}' \cdot dx - d\bar{X}' \cdot d\bar{X} &\neq 0 \\ \bar{\mathbb{E}} &= \begin{pmatrix} 0,06 & -0,22 \\ -0,22 & 0,06 \end{pmatrix} (\bar{e}_i) \end{aligned}$$

20.

Les tenseurs que nous avons déterminés sont symétriques avec des composantes réelles. Les représentants matriciels sont diagonalisables. C'est-à-dire qu'il est possible d'associer une base particulière dans laquelle le représentant matriciel sera purement diagonal.

Un parallélépipède rectangle élémentaire construit dans la configuration de référence selon cette base sera à nouveau un parallélépipède rectangle dans la configuration actuelle car les distorsions angulaires sont nulles. On peut alors envisager de calculer la variation relative de volume. Cette dernière peut être obtenue facilement à partir des composantes du tenseur de Cauchy Green droit. On fait alors apparaître le jacobien de notre tenseur.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_I & 0 & 0 \\ 0 & C_{II} & 0 \\ 0 & 0 & C_{III} \end{pmatrix} (\bar{E}_i)$$

$$\theta = \frac{dv - dV}{dV}$$

$$dv = \sqrt{C_I} dX_I \sqrt{C_{II}} dX_{II} \sqrt{C_{III}} dX_{III} = \sqrt{C_I C_{II} C_{III}} dV$$

$$dv = \sqrt{\det(\mathbf{C})} dV \quad J = \frac{dv}{dV} \quad \theta = J - 1$$

21.

Cette leçon nous aura permis de prendre conscience des différences existantes entre la notion de déplacement et de déformation. Nous avons vu aussi que nous ne pouvons nous contenter d'une représentation pour l'état de déformation et qu'il convient d'utiliser la notion de tenseur. Par la suite nous allons formuler des hypothèses complémentaires afin de simplifier nos études.

2-2 DEFORMATIONS

Petites déformations

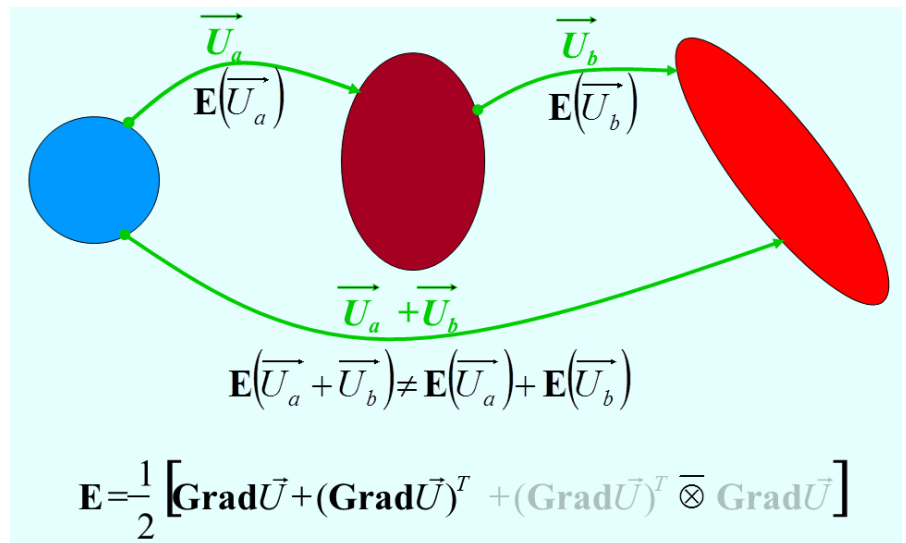
13.

Avec la leçon précédente, nous avons donné des pistes pour obtenir des valeurs de déformations ou de distorsions angulaires dans une configuration générale. Toutefois, on réalise assez facilement la complexité des formules obtenues ce qui va engendrer des difficultés de mise en œuvre. Afin de remédier à cela, nous allons maintenant faire l'hypothèse de transformation infinitésimale.

14.

La formulation des déformations au sein de la matière peut donc prendre une forme relativement compliquée. Avec les expressions données précédemment, on se rend compte que l'état de déformation n'est pas linéaire.

En d'autres termes, la déformation totale obtenue à la suite d'une succession de champs de déplacement n'est pas la simple addition des déformations élémentaires occasionnées par chaque champ de déplacement pris séparément. Mathématiquement, cette non linéarité provient du produit des deux tenseurs dans le calcul du tenseur de Green Lagrange. Mais dans de nombreuses applications, ce terme n'est pas prépondérant par rapport aux deux précédents et nous pourrions le négliger. On aura ainsi linéarisé notre transformation.



15.

Pour obtenir cette linéarisation, nous allons formuler l'hypothèse des transformations infinitésimales, dite encore l'hypothèse des petites perturbations. Cela se traduit essentiellement par deux propositions :

- Le tenseur gradient de déplacement ne contient que des termes très petits devant l'unité. $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \ll 1$
- Le déplacement de chacun des points du domaine matériel est petit. Cette dernière assertion est importante, car elle implique que l'on pourra confondre l'état actuel avec l'état initial de référence. Nous n'avons plus lieu de distinguer dans nos notations ces deux états et les indices majuscules et minuscules deviennent équivalents. $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

Afin de bien marquer ces différences avec l'étude en grandes déformations, nous appellerons ε ce tenseur qui caractérisera nos déformations. $\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T] = \mathbf{E}$

Dans une base cartésienne, le calcul des composantes de ce tenseur est très simple.

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij}$$

16.

Avec la relation précédente, on constate facilement que le tenseur déformation est en fait la partie symétrique du tenseur gradient du champ de déplacement. Il est défini par six composantes. On peut aussi définir la partie anti-symétrique qui donnera un tenseur déterminé en fait par seulement trois composantes, les termes situés sur la diagonale de la représentation matricielle étant nécessairement nuls.

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T] \quad \mathbf{Grad} \vec{U} = \overline{\varepsilon} + \overline{\omega}$$

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \vec{U} - (\mathbf{Grad} \vec{U})^T] \quad (\mathbf{Grad} \vec{U})^T = \overline{\varepsilon} - \overline{\omega}$$

On montre que l'on peut associer un vecteur à un tel tenseur de tel sorte que le produit tensoriel soit remplacé par un produit vectoriel.

$$\forall \vec{A} ; \quad \overline{\omega} \vec{A} = \overline{\omega} \wedge \vec{A}$$

L'opérateur gradient, qui en fait est un simple opérateur de dérivation spatiale, est linéaire.

$$\mathbf{Grad} [\lambda \vec{U}_a + \mu \vec{U}_b] = \lambda \mathbf{Grad} \vec{U}_a + \mu \mathbf{Grad} \vec{U}_b$$

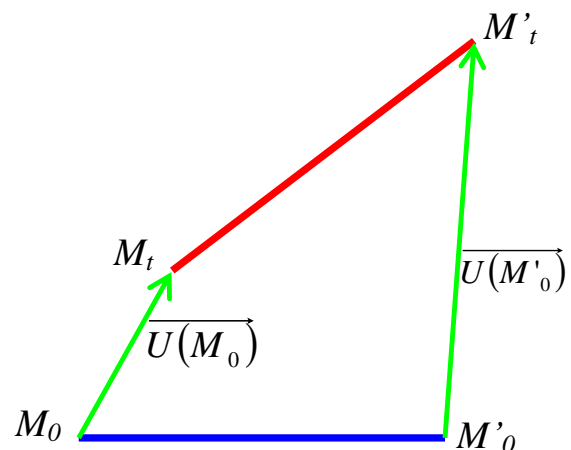
Il en découle que le tenseur déformation est lui aussi linéaire.

$$\overline{\varepsilon} [\lambda \vec{U}_a + \mu \vec{U}_b] = \lambda \overline{\varepsilon} [\vec{U}_a] + \mu \overline{\varepsilon} [\vec{U}_b]$$

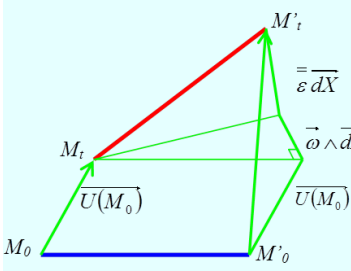
17.

On peut remarquer que le vecteur image d'un vecteur pris dans la configuration de référence est dépendant du tenseur gradient du champ de déplacement, donc de ses parties symétriques et anti-symétriques.

A partir du lien existant entre ces deux vecteurs et en utilisant la relation de Chasles, on en déduit une relation entre les vecteurs déplacements de deux points voisins pris dans la configuration de référence, deux points entre lesquels nous aurons tendu un élastique. Ces deux déplacements sont reliés entre eux par l'intermédiaire des tenseurs symétriques et anti-symétriques. En décomposant le déplacement du deuxième point, on peut voir qu'il y a tout d'abord le déplacement du premier point. Puis un vecteur lié au tenseur anti-symétrique, vecteur qui, compte tenu du fait que nous sommes dans l'hypothèse des petites perturbations, peut être obtenu par simple rotation.



Enfin une troisième composante est liée au tenseur symétrique. Grâce à cette décomposition, on voit que notre élastique initialement tendu entre les points M_0 et M'_0 ne s'est effectivement déformé que dans la dernière partie. Il est donc tout à fait logique de dire que le tenseur symétrique ε est le tenseur déformation. Si ce dernier est nul, localement le champ de déplacement se résume à une translation combinée à une rotation, ce qui n'engendre aucune déformation.



$$d\vec{x} - d\vec{X} = \mathbf{F} d\vec{X} - d\vec{X} = \mathbf{grad}\vec{U} d\vec{X}$$

$$d\vec{x} - d\vec{X} = \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{X} + \overline{\overline{\omega}} d\vec{X}$$

$$d\vec{X} = \overline{\overline{M_0 M'_0}} \quad d\vec{x} = \overline{\overline{M_t M'_t}}$$

$$\overline{\overline{U(M_0)}} = \overline{\overline{M_0 M_t}} \quad \overline{\overline{U(M'_0)}} = \overline{\overline{M'_0 M'_t}}$$

$$\overline{\overline{M_t M'_t}} - \overline{\overline{M_0 M'_0}} = \overline{\overline{M'_0 M'_t}} - \overline{\overline{M_0 M_t}}$$

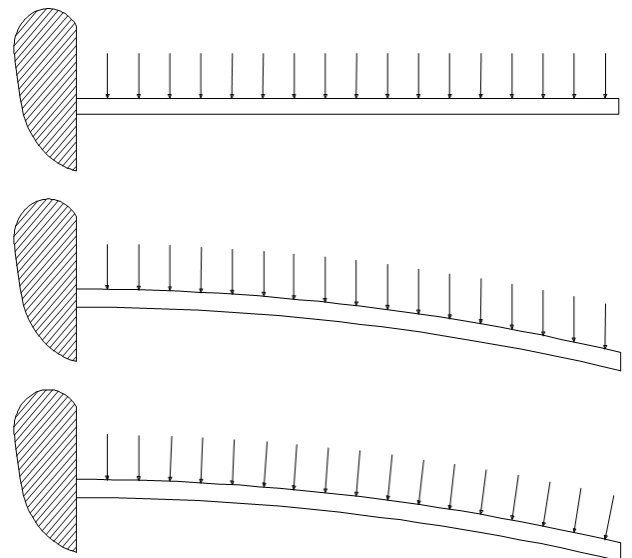
$$\overline{\overline{U(M'_0)}} = \overline{\overline{U(M_0)}} + \overline{\overline{\omega}} d\vec{X} + \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{X}$$

$$\overline{\overline{U(M'_0)}} = \overline{\overline{U(M_0)}} + \overline{\overline{\omega}} \wedge d\vec{X} + \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{X}$$

18.

L'hypothèse des petites perturbations est réalisée pour de nombreuses applications mais ils en existent qui ne peuvent s'en satisfaire. Pourtant c'est une réelle simplification au niveau des calculs.

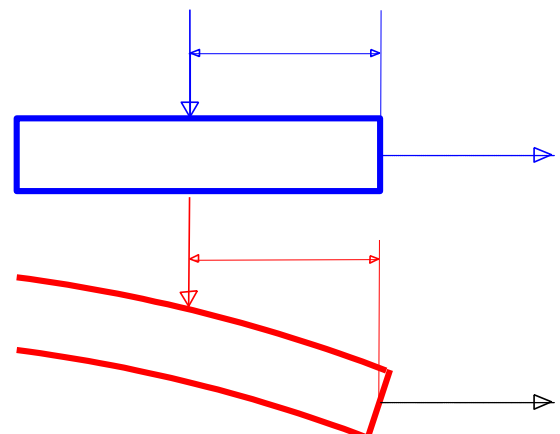
Pour nous en convaincre regardons le simple cas d'une poutre encastree à une extrémité et supportant une charge uniformément répartie sur toute sa longueur. En théorie des poutres, on travaille sur la structure en la considérant dans sa configuration de référence, c'est-à-dire comme si elle n'était pas déformée. Mais en toute rigueur, si les déformations sont un peu grandes, donc si l'hypothèse des petites perturbations n'est plus applicable, il faut faire les calculs sur la structure dans la configuration actuelle, donc en prenant en compte la déformée. Se pose alors la question de la définition précise du chargement. Avons-nous un chargement qui, tel les actions gravitationnelles, garde une direction constante quel que soit la déformée de notre structure ? Ou bien avons-nous un chargement qui, tel les actions de pression sur une surface, a une direction liée à la déformée de notre structure ?



19.

De la réponse à cette question va dépendre l'expression de notre moment de flexion. En effet dans le premier cas, la distance séparant le chargement au point de calcul du moment de flexion est comptée simplement en projection horizontale.

Alors que dans le deuxième cas, cette distance, qui doit être prise perpendiculairement à la ligne d'action du chargement, est fonction de notre déformée. Et ensuite, suivant la valeur de notre moment de flexion, la déformée de notre structure suivra. On réalise alors bien sur cet exemple qu'en dehors de l'hypothèse de petites perturbations, les calculs vont prendre une certaine complexité.



Et ceci prend encore une autre signification lorsque l'on rentre dans les calculs. La formule classique qui permet d'obtenir l'équation de la déformée d'une poutre en flexion fait apparaître une équation différentielle du second ordre. En regardant de près la démonstration de cette relation, on peut constater que l'on a considéré que la pente de la poutre était négligeable.

$$M_{fz} = EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Si ce n'est pas le cas, l'équation réelle est beaucoup plus complexe. Certes, cela donne toujours une équation différentielle du second ordre, mais la recherche de solution mathématique est loin d'être évidente.

$$M_{fz} = \frac{EI_{Gz}}{R} = EI_{Gz} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

20.

Avec l'hypothèse des petites perturbations, les termes contenus à l'intérieur du tenseur déformation sont négligeables devant l'unité. $\varepsilon_{ij} \ll 1$

Compte tenu de cette approximation, le calcul de la dilation linéaire dans une direction associée à un vecteur de notre base prend alors une expression très simple.

$$\varepsilon(M; \vec{E}_1) = \sqrt{\vec{E}_1 \mathbf{C} \vec{E}_1} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 \approx \varepsilon_{11}$$

De même pour la distorsion angulaire d'un angle droit formé entre deux vecteurs de notre base. Les deux résultats précédents montrent que les composantes de notre tenseur déformation peuvent avoir des significations physiques importantes.

$$\gamma(M; \vec{E}_1, \vec{E}_2) = \text{Arc sin} \left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}} \right) \approx 2\varepsilon_{12}$$

Ainsi, dans une base donnée, les termes situés sur la diagonale de notre tenseur vont être les dilations linéaires dans les directions des vecteurs de base. Pour les termes hors diagonale, on trouve les demi distorsions angulaires des angles droits formés par les vecteurs de notre base.

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{E}_1) & \frac{\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}{2} & \frac{\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_3)}{2} \\ \frac{\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}{2} & \varepsilon(\vec{E}_2) & \frac{\gamma(\vec{E}_2, \vec{E}_3)}{2} \\ \frac{\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_3)}{2} & \frac{\gamma(\vec{E}_2, \vec{E}_3)}{2} & \varepsilon(\vec{E}_3) \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

21.

Mais on peut aussi travailler avec de simples vecteurs unitaires et orthogonaux $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

La dilatation linéaire dans une direction unitaire est obtenue rapidement à partir de la connaissance du tenseur déformation.

$$\varepsilon(M; \vec{a}) = \vec{a} \cdot \mathbf{\varepsilon} \vec{a} = \varepsilon_{aa}$$

De même, avec le tenseur déformation, il est très simple de calculer la distorsion angulaire pour deux vecteurs orthogonaux. Compte tenu de la symétrie de ce tenseur, on peut utiliser deux expressions différentes pour ce calcul.

$$\gamma(M; \vec{a}, \vec{b}) = 2 \vec{a} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{b} = 2 \varepsilon_{ab} = 2 \vec{b} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{a}$$

Si l'on considère un vecteur unitaire quelconque, l'image de ce dernier par le tenseur déformation nous permet de déterminer un nouveau vecteur que nous appellerons le vecteur déformation pure au point considéré dans la direction unitaire choisie.

$$D_p(M; \vec{a}) = \overline{\overline{\varepsilon}}(M) \vec{a}$$

Enfin l'expression de la variation relative de volume au point étudié nous conduit en fait à la trace du tenseur déformation, soit encore la divergence du vecteur déplacement.

$$\theta = \frac{dv-dV}{dV} = J-1 \approx \text{tr} \overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = \text{div} \vec{U}$$

22.

Dans la base d'étude, le tenseur des déformations est représenté par une matrice symétrique à coefficients réels. Comme nous l'avons vu précédemment, il est possible de trouver une base dans laquelle, le tenseur prend une forme purement diagonale. Cette base peut être définie par le processus de diagonalisation, c'est-à-dire de recherche de vecteurs propres et de valeurs propres associés à notre état de déformation.

Un vecteur propre est un vecteur colinéaire à son image par notre application tensorielle, le coefficient de colinéarité étant la valeur propre.

$$\overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{N}_I = \varepsilon_I \vec{N}_I$$

Avec l'équation précédente, on peut déduire une relation importante permettant d'obtenir les valeurs propres.

$$\overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{N}_I - \varepsilon_I \vec{N}_I = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \det(\overline{\overline{\varepsilon}} - \varepsilon_I \vec{I}) = 0$$

D'autre part, du fait de la symétrie de notre tenseur déformation, on constate que l'on peut écrire la relation dite de Cauchy :

$$\vec{N}_I \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{N}_{II} = \vec{N}_{II} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{N}_I \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_I \cdot \varepsilon_{II} \vec{N}_{II} = \vec{N}_{II} \cdot \varepsilon_I \vec{N}_I$$

Ce qui nous montre que si deux valeurs propres sont distinctes, alors les vecteurs propres associés sont orthogonaux.

$$(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \vec{N}_I \cdot \vec{N}_{II} = 0$$

Les trois vecteurs propres peuvent donc constituer une base orthonormée directe dans laquelle le représentant matriciel de notre état de déformation est purement diagonal. On appelle directions principales, les directions données par les vecteurs propres. Les valeurs propres seront appelées déformations principales.

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{N}_I \\ \vec{N}_{II} \\ \vec{N}_{III} \end{pmatrix}$$

23.

Pour un tenseur quelconque, la recherche des valeurs propres passe par l'annulation du polynôme caractéristique. Ce polynôme peut être défini à partir de n'importe quel représentant matriciel du tenseur, c'est-à-dire dans n'importe quelle base. Toutefois les racines de ce polynôme, c'est-à-dire les valeurs propres doivent toujours être les mêmes. En conséquence, le polynôme est indépendant de la base.

$$P_T(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + T_I \lambda^2 - T_{II} \lambda + T_{III}$$

Ce qui revient à dire que les coefficients du polynôme sont des invariants par changement de base. Le premier invariant représente tout simplement la trace de notre matrice. Le dernier est le déterminant. Le deuxième est la demi-différence du carré de la trace de la matrice avec la trace de la matrice multipliée par elle-même.

$$\begin{cases} T_I = \text{tr} \mathbf{T} \\ T_{II} = \frac{1}{2} \left((\text{tr} \mathbf{T})^2 - \text{tr} \mathbf{T}^2 \right) \\ T_{III} = \det \mathbf{T} \end{cases}$$

En faisant le calcul dans la base principale, on obtient des résultats assez simples.

$$\begin{cases} T_I = \lambda_I + \lambda_{II} + \lambda_{III} \\ T_{II} = \lambda_I \lambda_{II} + \lambda_{II} \lambda_{III} + \lambda_{III} \lambda_I \\ T_{III} = \lambda_I \lambda_{II} \lambda_{III} \end{cases}$$

24.

Avec cette leçon, nous avons vu comment obtenir des relations simplifiées dans le cas d'une transformation infinitésimale. Ces expressions seront très utiles dans la suite car elles permettent d'appliquer sans problème le principe de superposition.

2-3 DEFORMATIONS

Représentations graphiques - Compatibilité

1.

Pour en terminer avec notre étude sur l'état de déformation en un point, il nous reste à en voir la décomposition en partie sphérique et déviatorique ainsi que les modes de représentations graphiques. Nous concluons cette leçon par l'établissement des équations de compatibilité entre un état de déformation et un champ de déplacement.

2.

Pour un tenseur du second ordre quelconque, il est toujours possible de le décomposer sous forme d'une somme de deux tenseurs de tel sorte que l'un soit sphérique et que l'autre ait une trace nulle. La décomposition est unique.

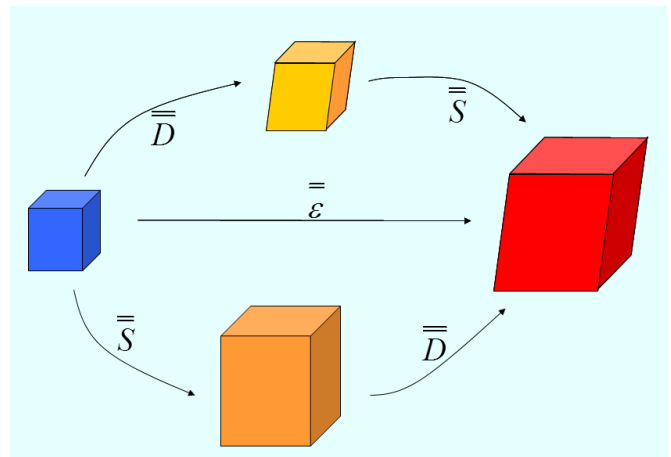
$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{I}/3 = T_{ii}\mathbf{I}/3$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} - \mathbf{S}$$

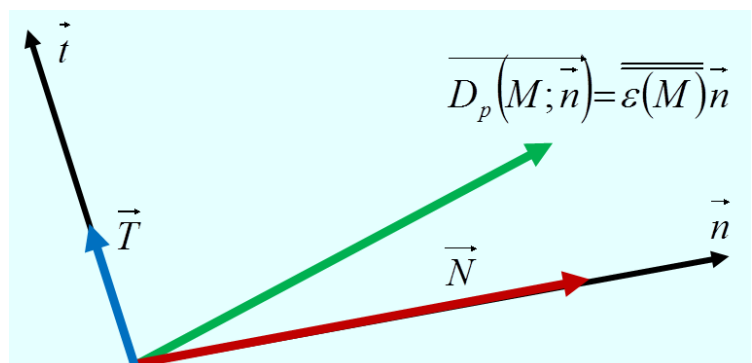
Dans le cas des déformations, comme la trace du tenseur représente la variation relative de volume, avec le tenseur sphérique, on change le volume sans changer la forme alors qu'avec le tenseur déviatorique, on change la forme sans changer le volume.

Prenons l'exemple d'une déformation imposée à un domaine. Comme nous sommes en petites perturbations et que l'on peut linéariser les déformations, on peut très bien considérer que l'on a tout d'abord un état déviatorique complété par un état sphérique. Mais on peut aussi admettre que l'on impose un état sphérique suivi d'un état déviatorique.



3.

La représentation graphique dans le plan de Mohr est tout à fait intéressante. Pour mémoire, ce plan est le plan vectoriel contenant l'axe normal selon lequel on souhaite faire l'étude en un point et le vecteur image associé. Dans le cas



de l'application tensorielle déformation ce vecteur est le vecteur déformation pure.

La projection du vecteur déformation pure sur l'axe normal nous donne directement la mesure de la dilatation linéaire au point d'étude, dans la direction de l'axe normal étudié.

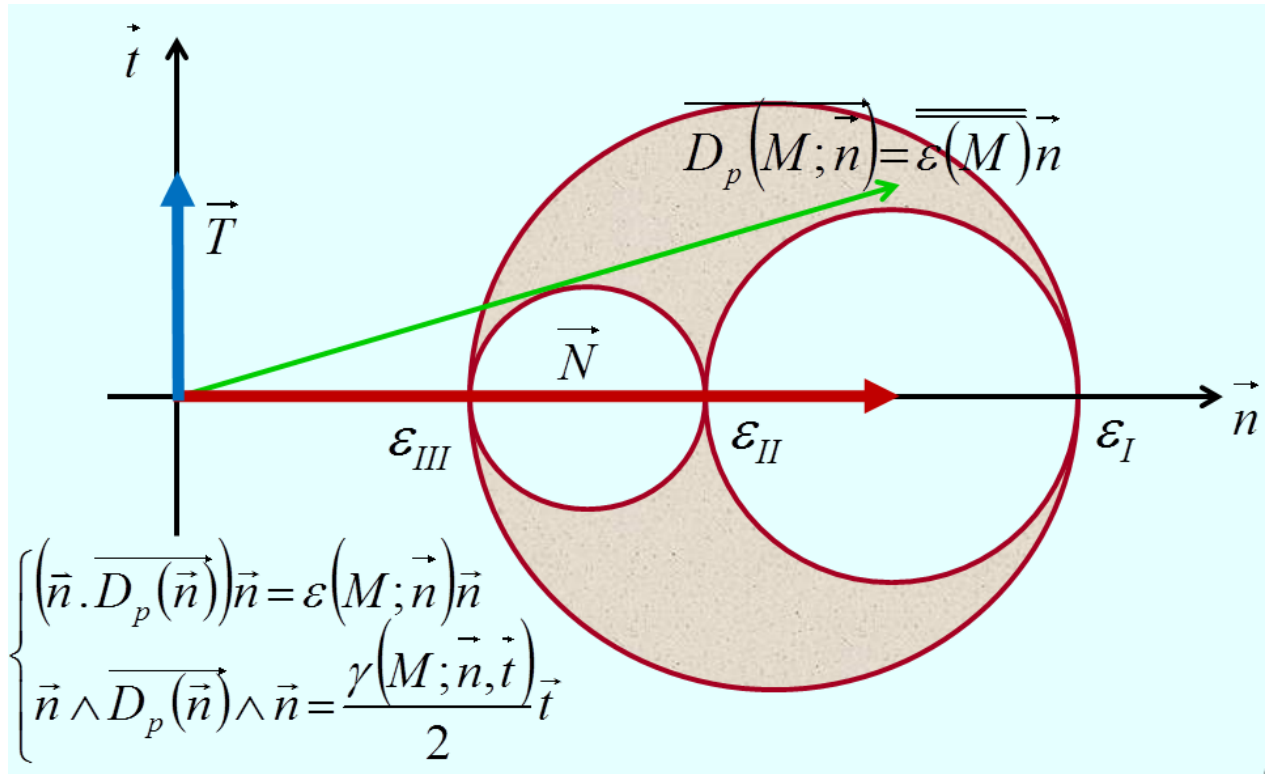
$$\vec{N} = (\vec{n} \cdot \overline{D_p(\vec{n})}) \vec{n} = \varepsilon(M; \vec{n}) \vec{n}$$

La projection sur l'axe tangent nous permet d'avoir la demi-valeur de la distorsion angulaire au point d'étude, pour l'angle droit initialement formé entre l'axe normal et le vecteur orthogonal appartenant au plan de Mohr.

$$\vec{T} = \vec{n} \wedge \overline{D_p(\vec{n})} \wedge \vec{n} = \frac{\gamma(M; \vec{n}, \vec{t})}{2} \vec{t}$$

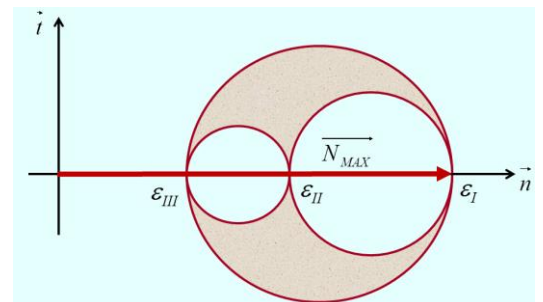
4.

Dans la représentation du tri-cercle de Mohr, on sait que le vecteur image doit avoir son extrémité à l'intérieur de la zone délimitée par ces trois cercles. Donc les projections sur les vecteurs de base sont aussi limitées.

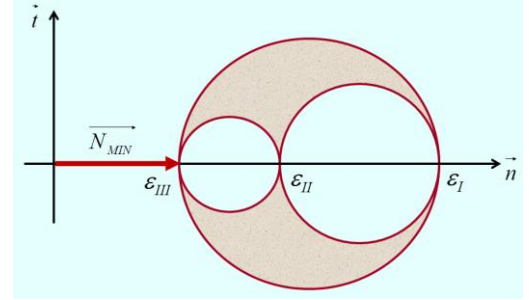


5.

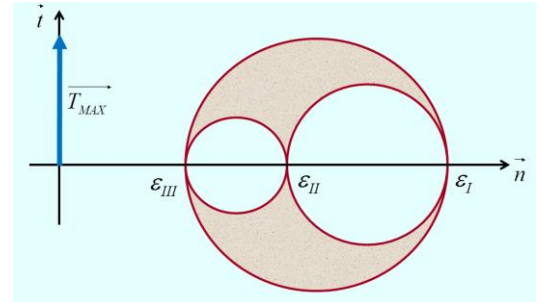
La plus grande déformation principale représente la dilatation linéaire la plus élevée au point d'étude.



La plus petite déformation principale représente la dilatation linéaire la plus faible au point d'étude.



Enfin, la plus grande distorsion angulaire est donnée par le diamètre du plus grand des trois cercles, c'est-à-dire la différence entre la plus grande déformation principale et la plus petite.



6.

Les tenseurs déformations, c'est-à-dire des tenseurs du second ordre, sont calculables par dérivation du champ de déplacement, c'est-à-dire un tenseur du premier ordre.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \bar{U} + (\mathbf{Grad} \bar{U})^T]$$

Les formules indicelle en coordonnées cartésiennes pour le calcul des six composantes du tenseur déformation montrent qu'elles se déduisent simplement des trois composantes du vecteur déplacement.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Il est parfois utile d'envisager le cheminement inverse, c'est-à-dire déterminer le champ de déplacement associé à un état de déformation. Cette transformation n'est pas immédiate car elle implique un processus d'intégration de six fonctions scalaires pour remonter à trois fonctions scalaires constituant les composantes d'un vecteur.

$$\bar{\varepsilon}(M) \Rightarrow ? \Rightarrow \bar{U}(M)$$

Pour que cela puisse être réalisable, il faut que les composantes du tenseur déformation soient liées entre elles. Ces liens s'appellent les conditions de compatibilités.

7.

Ces conditions, qui ne traduisent que des conditions d'intégrabilité de différentielles totales exactes, sont obtenues en partant du tenseur anti symétrique.

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \bar{U} - (\mathbf{Grad} \bar{U})^T] \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En faisant la démonstration dans un système de coordonnées cartésiennes, on constate que les dérivées spatiales des composantes de ce tenseur anti symétrique sont liées aux dérivées spatiales des composantes du tenseur des déformations.

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i}$$

8.

En fait ces dérivées spatiales peuvent être interprétées comme les composantes du vecteur gradient de cette composante du tenseur anti symétrique.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\omega_{ij}) = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} \overrightarrow{E}_k$$

Mais ceci ne sera effectivement un vecteur gradient que si le rotationnel associé est nul ce qui nous donne les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0 = \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$$

Ce qui constitue en fait les conditions d'intégrabilité de Cauchy d'une différentielle totale exacte.

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_m} dx_m$$

En fonction des composantes du tenseur déformation, et compte tenu de sa symétrie, on obtient en fait un système de six équations indépendantes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0$$

9.

Ces équations peuvent se présenter sous forme développées dans un système de coordonnées cartésiennes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0$$

Mais la forme générale valable dans n'importe quel système de coordonnées est une formulation tensorielle.

$$\mathbf{grad} \overline{\text{div}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \left(\mathbf{grad} \overline{\text{div}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \right)^T - \mathbf{grad} \left(\overline{\text{grad}} \left[\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \right] \right) - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$$

10.

Si les conditions de compatibilités sont satisfaites, il est alors possible de déterminer les champs de déplacement générateurs de l'état de déformation.

Pour cela, il faut commencer par intégrer les différentielles donnant les trois composantes du tenseur anti symétrique.

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

Ensuite, on peut remonter aux trois composantes du vecteur déplacement par intégration des formes différentielles reliant le vecteur déplacement aux tenseurs déformation et anti symétrique.

$$du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

L'auditeur curieux pourra appliquer la méthode pour trouver les champs de déplacement générateur du tenseur déformation proposé.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \nu b x_1 & a x_1 x_2 & 0 \\ a x_1 x_2 & \nu b x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -b x_1 \end{pmatrix} (\vec{e}_i)$$

11.

La représentation graphique de Mohr permet de bien comprendre l'intérêt que nous avons à définir les déformations principales qui représentent en un point les valeurs extrémales des dilatations linéaires et des distorsions angulaires. Enfin nous avons vu qu'il n'est pas suffisant de se donner une matrice symétrique pour avoir un état de déformation. Il est indispensable que les relations de compatibilité soient vérifiées.

2-4 DEFORMATIONS

Application

Enoncé

On considère le champ de déplacement donné par les relations suivantes :

$$\vec{u}(X_j, t) = \vec{x} - \vec{X} = k X_2 \vec{E}_1$$

1- Déterminer alors les composantes, dans la base orthonormée directe $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, des tenseurs suivants :

F	$d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}$	Tenseur gradient
C	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = d\vec{X} \mathbf{C} d\vec{X}'$	Tenseur de Cauchy Green Droit
E	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \mathbf{E} d\vec{X}'$	Tenseur des déformations de Green Lagrange

2- On se place au point M_0 de coordonnées (1, 1, 0). Soient \vec{a} le vecteur représentant la bissectrice du plan (\vec{E}_1, \vec{E}_2) et \vec{b} le vecteur représentant la trisectrice du trièdre :

$$\vec{a} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad \vec{b} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Calculer la dilatation linéaire en M_0 dans les directions \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{a} et \vec{b} .

Calculer les distorsions angulaires suivantes :

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2) \quad \gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{a})$$

3- On a $k = 10^{-3}$.

En admettant la linéarisation, définir les composantes du tenseur de déformation et du tenseur antisymétrique :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\overline{\mathbf{grad} \vec{U}} + \left(\overline{\mathbf{grad} \vec{U}} \right)^T \right] \qquad \omega = \frac{1}{2} \left[\overline{\mathbf{grad} \vec{U}} - \left(\overline{\mathbf{grad} \vec{U}} \right)^T \right]$$

4- Tracer le tricercle de Mohr des déformations au point M . Représenter sur ce tricercle les vecteurs déformations pures dans les directions \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{a} et \vec{b} :

$$\overline{D_p(M; \vec{E}_1)} \quad \overline{D_p(M; \vec{E}_2)} \quad \overline{D_p(M; \vec{a})} \quad \overline{D_p(M; \vec{b})}$$

1.

Nous allons regarder une application sur l'état de déformation à partir d'un exercice.

2.

Voici l'énoncé de l'exercice. Les auditeurs sont invités à apporter des réponses de façon autonome puis à valider la solution en regardant les réponses. A partir de la donnée d'un champ de déplacement, nous allons définir les tenseurs rencontrés dans le cours. Ensuite nous verrons comment obtenir soit par des solutions graphiques, soit par des calculs, des dilatations linéaires et des distorsions angulaires. En passant en transformation infinitésimale on définira le tenseur des déformations auquel on va associer un tricerclé de Mohr. On terminera en représentant sur ce tricerclé différents vecteurs déformations pures.

3.

Nous avons plusieurs formules permettant de calculer le tenseur gradient et l'on peut utiliser celle qui donne le lien avec le tenseur gradient du champ de déplacement

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \text{Grad} \vec{U}$$

Concrètement, cela revient à dire que le tenseur gradient est obtenu en faisant la somme du tenseur identité avec le tenseur traduisant les variations du champ de déplacement dans l'espace. Pour faire cette somme il est indispensable que les deux représentants tensoriels soient exprimés dans la même base.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Comme le champ de déplacement est très simple, le tenseur gradient du champ de déplacement présente de nombreux termes nuls. Il est à noter que nous avons affaire à un état homogène, c'est-à-dire indépendant de la position du point. Le tenseur gradient obtenu est le même en tout point de l'espace ce qui sera aussi le cas pour les autres résultats.

$$\vec{u}(X_j, t) = \vec{x} - \vec{X} = k X_2 \vec{E}_1 \Rightarrow U_1 = k X_2, U_2 = 0, U_3 = 0 \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

4.

Pour le calcul du tenseur de Cauchy Green Droit, nous avons une relation directe à partir du tenseur gradient.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}$$

Le calcul des composantes nous ramène à un simple produit de matrices.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

De même, nous avons une formule simple pour le calcul du tenseur de Green Lagrange.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Ce qui nous permet d'obtenir ses composantes dans notre base d'étude.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

5.

Nous allons faire une petite figure afin de bien comprendre la transformation. Pour cela nous commençons par positionner le point M_0 dans un repère plan avec le point O comme origine et les vecteurs (\vec{E}_1, \vec{E}_2) comme base. Comme la deuxième coordonnée du point M_0 vaut 1, le déplacement de ce point est horizontal et sa valeur vaut k ce qui nous permet de représenter le point M image dans la configuration actuelle.

$$\vec{M_0M} = \vec{U}(M_0) = k X_2 \vec{E}_1 = k \vec{E}_1$$

Pour imager la dilatation linéaire dans la direction \vec{E}_1 nous allons utiliser des clous et un élastique. On plante un premier clou au point d'étude M_0 . Ensuite il nous faut mettre, dans la configuration initiale, un élastique de longueur très faible dans la direction \vec{E}_1 . Pour cela, on sélectionne un point P_0 de tel sorte qu'il soit infiniment proche de M_0 et dans la direction \vec{E}_1 . On plante un clou en P_0 et on tire un élastique de longueur dX entre les deux points. Ensuite on regarde comment se placent ces deux clous dans la configuration actuelle pour avoir la nouvelle longueur de l'élastique et en déduire son allongement.

$$\vec{M_0P_0} = dX = dX \vec{E}_1$$

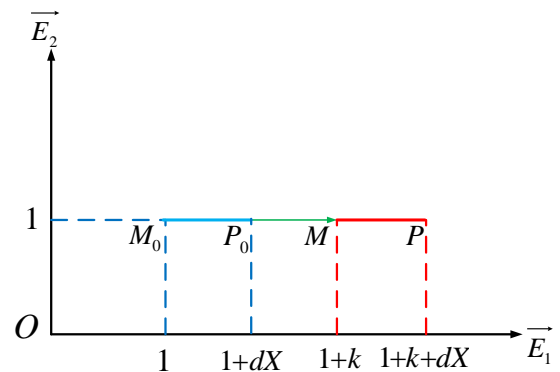
Mais en fait comme le déplacement du point P_0 est le même que celui du point M_0 car ils ont la même deuxième coordonnée de positionnement, le passage de la configuration de référence à la configuration actuelle pour notre élastique est une simple translation sans variation de longueur.

$$\vec{P_0P} = \vec{U}(P_0) = k X_2 \vec{E}_1 = k \vec{E}_1 = \vec{U}(M_0)$$

$$\vec{MP} = dx = dx \vec{E}_1 = dX \vec{E}_1$$

On constate donc facilement que l'allongement de l'élastique est nul ce qui revient à dire que la dilatation linéaire au point M_0 dans la direction \vec{E}_1 est nulle.

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_1) = \frac{dx - dX}{dX} = 0$$



6.

On peut reprendre la même technique pour obtenir la dilatation linéaire dans la direction \vec{E}_2 . Pour cela il faut définir dans la configuration de référence un point Q_0 infiniment voisin du point M_0 positionné dans la direction \vec{E}_2 . $\vec{M_0Q_0} = dX' = dX' \vec{E}_2$

Ensuite on impose le champ de déplacement pour obtenir le point image Q dans la configuration actuelle. Cette fois, comme la deuxième coordonnée du point Q_0 est différente de la deuxième coordonnée du point M_0 les deux déplacements sont différents.

$$\vec{Q_0Q} = \vec{U}(Q_0) = k X_2 \vec{E}_1 = k(1 + dX') \vec{E}_1 = \vec{U}(M_0) + k dX' \vec{E}_1$$

Cela nous permet d'obtenir la position de notre nouvel élastique dans la configuration actuelle, position déterminée par un vecteur.

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{dx'}$$

La longueur de l'élastique dans la configuration actuelle, c'est-à-dire la norme du vecteur ainsi déterminé, nous permet de calculer la dilatation linéaire recherchée.

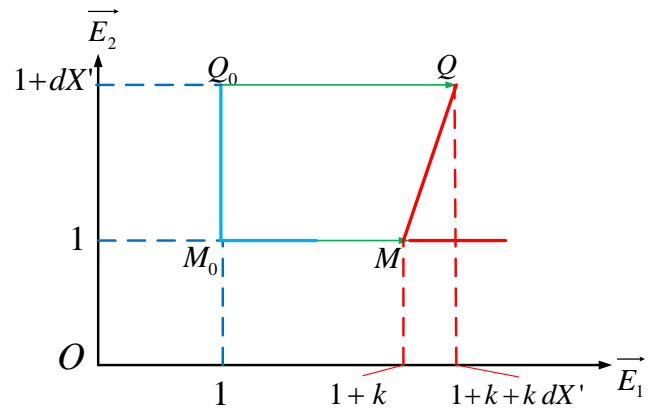
$$\varepsilon(M_0; \overrightarrow{E}_2) = \frac{dx' - dX'}{dX'}$$

Pour obtenir cette norme, on peut se contenter du théorème de Pythagore.

$$dx'^2 = dX'^2 + k^2 dX'^2$$

Et on obtient la dilatation linéaire au point M_0 dans la direction \overrightarrow{E}_2 qui cette fois n'est pas nulle.

$$\varepsilon(M_0; \overrightarrow{E}_2) = \sqrt{1+k^2} - 1$$



7.

Essayons de réutiliser cette technique à base de clous et d'élastique pour obtenir la dilatation linéaire dans une direction selon la bissectrice du plan. Il faut donc définir dans la configuration de référence un point R_0 très proche de M_0 dans la direction de la bissectrice.

$$\overrightarrow{M_0 R_0} = dX'' = \frac{dX''}{\sqrt{2}} (\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2)$$

Ensuite on lui associe son image dans la configuration actuelle par le champ de déplacement.

$$\overrightarrow{R_0 R} = \overline{U(R_0)} = k \left(1 + \frac{dX''}{\sqrt{2}} \right) \overrightarrow{E}_1$$

Ce qui nous permet d'obtenir le vecteur position de notre élastique dans la configuration actuelle.

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{dx''}$$

Pour calculer la norme de ce vecteur, c'est-à-dire la nouvelle longueur de l'élastique, on va utiliser la relation de Chasles.

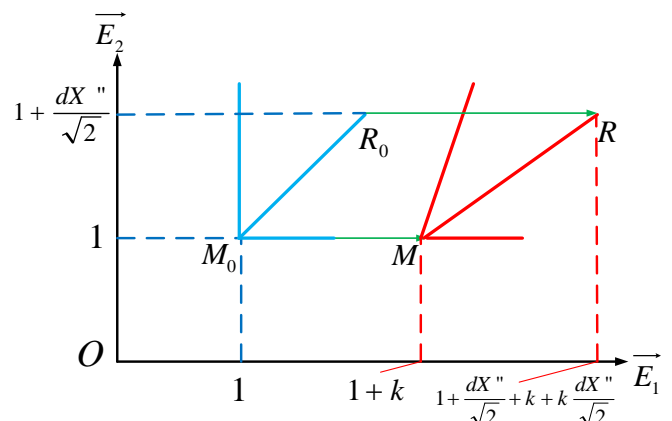
$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{dx''} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0 R_0} + \overrightarrow{R_0 R}$$

$$\overrightarrow{MR} = -k \overrightarrow{E}_1 + \frac{dX''}{\sqrt{2}} (\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2) + k \left(1 + \frac{dX''}{\sqrt{2}} \right) \overrightarrow{E}_1$$

$$\overrightarrow{MR} = \frac{dX''}{\sqrt{2}} \left[(1+k) \overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 \right]$$

On obtient ainsi la longueur de l'élastique dans la configuration actuelle.

$$dx'' = dX'' \sqrt{\frac{2+2k+k^2}{2}}$$



Et on peut enfin déterminer la dilatation linéaire au point M_0 dans la direction de la bissectrice.

$$\varepsilon(M_0; \vec{a}) = \sqrt{\frac{2+2k+k^2}{2}} - 1$$

8.

Ce dernier calcul montre la complexité grandissante de notre méthode avec clous et élastiques. Même si c'est sympathique du point de vue intellectuel, on ne peut continuer ainsi et il faut avoir une autre technique pour accéder plus rapidement au résultat recherché.

Pour cela nous allons utiliser le lien entre la dilatation linéaire et le tenseur de Green Lagrange :

$$\varepsilon(M_0; \vec{n}) = \sqrt{1 + \vec{n} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{n}} - 1$$

On doit calculer le résultat du produit scalaire situé sous la racine carrée. En notation matricielle, les représentants du vecteur et du tenseur doivent être exprimés dans la même base. D'autre part, nous avons vu qu'il était nécessaire de transposer le représentant matriciel du premier vecteur.

$$\vec{n} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{n} = 2(n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi rapidement le résultat concernant la dilatation linéaire dans la direction \vec{E}_1

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_1) = \sqrt{1 + \vec{E}_1 (2 \overline{\overline{E}}) \vec{E}_1} - 1 = \sqrt{1 + 2 E_{11}} - 1 = 0$$

Il en est de même pour la dilatation linéaire dans la direction \vec{E}_2

$$\varepsilon(M_0; \vec{E}_2) = \sqrt{1 + \vec{E}_2 (2 \overline{\overline{E}}) \vec{E}_2} - 1 = \sqrt{1 + 2 E_{22}} - 1 = \sqrt{1 + k^2} - 1$$

Pour la dilatation linéaire selon la bissectrice, il ne faut pas oublier que pour l'application de la formule le vecteur doit être unitaire

$$\vec{a} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2k+k^2}{2}$$

Et on obtient bien le résultat déjà vu.

$$\varepsilon(M_0; \vec{a}) = \sqrt{1 + \vec{a} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{a}} - 1 = \sqrt{\frac{2+2k+k^2}{2}} - 1$$

Enfin avec la formule, il est simple de calculer la dilatation linéaire selon la trissectrice

$$\vec{b} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2k+k^2}{3}$$

$$\varepsilon(M_0; \vec{b}) = \sqrt{1 + \vec{b} (2 \overline{\overline{E}}) \vec{b}} - 1 = \sqrt{\frac{3+2k+k^2}{3}} - 1$$

9.

Pour l'expression de la distorsion angulaire de l'angle formé entre les directions \vec{E}_1 et \vec{E}_2 on peut essayer de revenir sur la figure. En effet en comparant les positions des points entre la configuration de référence et la configuration actuelle on peut faire apparaître l'angle de distorsion.

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2) = Q_0 M_0 P_0 - QMP$$

On peut alors avoir facilement le sinus de cet angle.

$$\sin[\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2)] = \frac{k dX'}{\sqrt{dX'^2 + k^2 dX^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

Toutefois, à nouveau nous ne pourrions pas travailler ainsi avec nos clous et élastiques et pour obtenir nos distorsions angulaires nous utiliserons une formule.

$$\gamma(M_0; \vec{N}, \vec{M}) = \arcsin \left[\frac{\vec{N} \cdot (2\vec{E}) \vec{M}}{\sqrt{1 + \vec{N} \cdot (2\vec{E}) \vec{N}} \sqrt{1 + \vec{M} \cdot (2\vec{E}) \vec{M}}} \right]$$

L'application de la formule permet de retrouver le résultat précédent.

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2) = \arcsin \left[\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}} \right] = \arcsin \left[\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \right]$$

Par contre, la formule ne peut pas être employée pour calculer la distorsion angulaire de l'angle initialement formé entre la direction \vec{E}_1 et la bissectrice. En effet cet angle formé n'est pas un angle droit et la notion de distorsion angulaire n'est définie que pour des vecteurs initialement orthogonaux.

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{a})$$

10.

La valeur de la constante étant définie, on peut reprendre la figure en travaillant à l'échelle. On constate qu'en fait les vecteurs déplacements sont très faibles et que nous ne pouvons distinguer la configuration actuelle de la configuration de référence.

D'autre part, ce dernier étant infinitésimal, on peut négliger le terme non nul du tenseur de Green Lagrange.

$$\overline{\overline{\overline{E}}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i) \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Ces composantes représentent en fait le tenseur déformation qui est la partie symétrique du tenseur gradient du champ de déplacement.

$$\overline{\overline{\overline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \left[\overline{\overline{\overline{\text{Grad } \vec{U}}} + \left(\overline{\overline{\overline{\text{Grad } \vec{U}}} \right)^T} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Il est tout aussi simple d'obtenir les composantes du tenseur anti-symétrique.

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} \left[\overline{\text{Grad } \vec{U}} - \left(\overline{\text{Grad } \vec{U}} \right)^T \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

11.

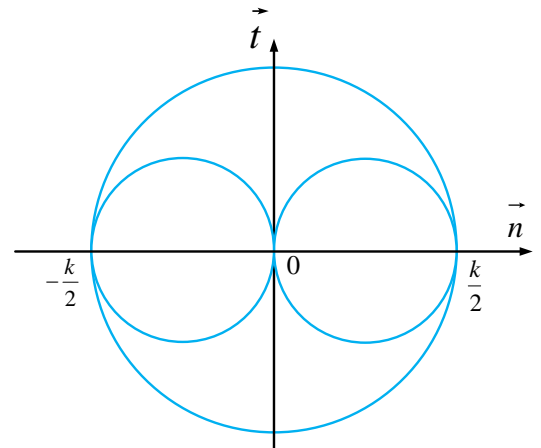
Pour la représentation du tricerclé de Mohr il faut connaître les trois valeurs propres du tenseur des déformations. Ce qui revient à déterminer les racines du polynôme caractéristique.

$$\det(\overline{\varepsilon} - \lambda \vec{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & k/2 & 0 \\ k/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \left(\lambda + \frac{k}{2} \right) \left(\lambda - \frac{k}{2} \right)$$

On obtient ainsi les trois déformations principales que l'on va ordonner de la plus grande vers la plus petite.

$$\varepsilon_I = \frac{k}{2}; \varepsilon_{II} = 0; \varepsilon_{III} = -\frac{k}{2}$$

On place dans le plan de Mohr trois points sur l'axe horizontal ayant des abscisses déterminées par ces valeurs. Sachant que deux points au hasard constituent le diamètre d'un cercle, on peut alors tracer le tricerclé de Mohr.



12.

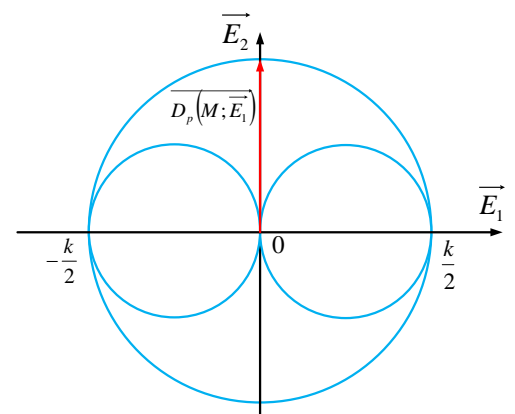
Pour pouvoir représenter sur ce tricerclé un vecteur déformation pure, il faut tout d'abord calculer ce vecteur.

$$\overline{D}_p(M; \vec{n}) = \overline{\varepsilon}(M) \cdot \vec{n}$$

Le premier vecteur est celui associé à la direction \vec{E}_1

$$\overline{D}_p(M; \vec{E}_1) = \overline{\varepsilon}(M) \cdot \vec{E}_1 = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \vec{E}_2$$

Pour représenter ce vecteur sur le plan de Mohr il faut tout d'abord dire que le vecteur normal \vec{n} est confondu avec le vecteur \vec{E}_1 . Comme la projection du vecteur sur l'axe normal \vec{E}_1 est nulle, on en déduit que la composante normale est nulle et que le vecteur est purement tangentiel, c'est-à-dire porté par le vecteur \vec{t} . Donc tout naturellement ce dernier sera pris égal au vecteur \vec{E}_2 et on peut représenter le vecteur déformation pure.

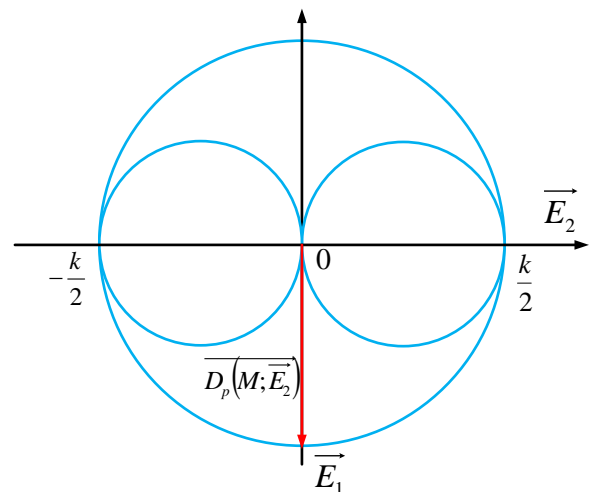


13.

Maintenant on calcule le vecteur déformation pure dans la direction \vec{E}_2 .

$$\overline{D}_p(M; \vec{E}_2) = \overline{\varepsilon}(M) \cdot \vec{E}_2 = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \vec{E}_1$$

Pour la représentation sur le plan de Mohr, il faut indiquer que cette fois le vecteur normal \vec{n} est confondu avec le vecteur \vec{E}_2 . A nouveau la composante normale du vecteur déformation pure est nulle. Par respect de l'orientation que nous avons pris précédemment nous dirons que le vecteur tangent \vec{t} est opposé au vecteur \vec{E}_1 . Nous pouvons donc représenter le vecteur déformation pure. On constate que les deux vecteurs déformations pures se retrouvent opposés dans la représentation de Mohr alors que dans l'espace ils sont orthogonaux. Ceci est dû au fait que pour la représentation sur le plan de Mohr, l'axe normal est toujours l'axe d'étude, en l'occurrence \vec{E}_1 puis \vec{E}_2 et que dans l'espace il y a une rotation de 90° entre ces deux axes.



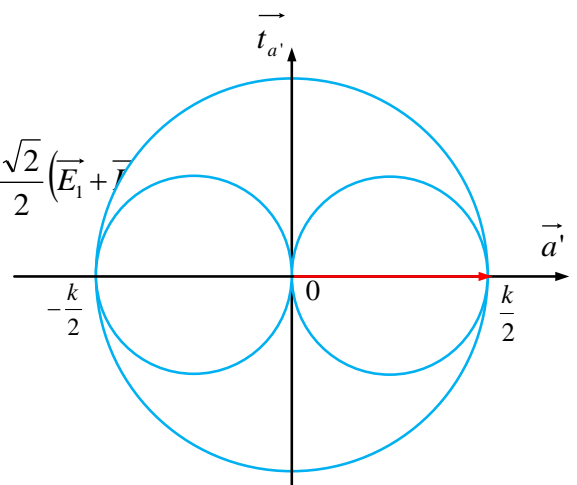
14.

Dans le cas de la bissectrice, il faut tout d'abord définir le vecteur unitaire associé à cette direction.

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\sqrt{2} \vec{a}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

On peut alors calculer les composantes du vecteur déformation pure.

$$\overline{D_p(M; \vec{a}')} = \overline{\varepsilon(M)} \cdot \vec{a}' = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$



Comme dans les cas précédents, pour la représentation sur le tricerclé de Mohr, il faut dire que le vecteur normal d'étude \vec{n} est en fait le vecteur \vec{a}' . De ce fait le vecteur déformation pure est simplement sur l'axe normal du tricerclé.

15.

Avant de passer à l'étude dans la direction de la trisectrice, nous allons examiner les résultats obtenus afin d'en tirer quelques conclusions. Nous avons dit que dans le cas général, le vecteur déformation pure avait son extrémité à l'intérieur du tricerclé de Mohr. Toutefois dans les trois cas nous obtenons des configurations particulières avec des extrémités soit sur un cercle, soit au point de jonction de deux cercles. Pour avoir l'extrémité du vecteur déformation pure sur l'un des cercles, il faut que le vecteur normal d'étude appartienne à un plan principal, ou encore soit orthogonal avec une direction principale ou vecteur propre.

Donc le vecteur \vec{E}_1 appartient à un plan principal. Comme l'extrémité du vecteur déformation pure est sur le grand cercle de Mohr passant par les valeurs propres extrémales ε_I et ε_{III} , on en déduit que le vecteur d'étude \vec{E}_1 appartient au plan des vecteurs propres extrémaux.

$$\vec{E}_1 \in (\vec{N}_I, \vec{N}_{III})$$

On a un renseignement similaire avec le fait que l'extrémité du vecteur déformation pure associé au vecteur d'étude \vec{E}_2 est sur le grand cercle de Mohr.

$$\vec{E}_2 \in (\vec{N}_I, \vec{N}_{III})$$

Donc on peut en déduire que le plan formé par les vecteurs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 est confondu avec le plan des vecteurs propres extrémaux ce qui implique que le vecteur \vec{E}_3 est égal, au signe près, au vecteur propre intermédiaire, la valeur propre associée étant nulle.

$$(\vec{E}_1, \vec{E}_2) \equiv (\vec{N}_I, \vec{N}_{III}) \Leftrightarrow \vec{E}_3 = \vec{N}_{II}$$

Ce résultat aurait pu être considéré comme évident au vu de la structure du représentant matriciel de notre tenseur déformation dans la base d'étude.

$$\varepsilon = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

D'autre part, l'extrémité du vecteur déformation pure associé à la bissectrice se trouve sur deux cercles. Donc la bissectrice est contenue dans deux plans principaux ce qui implique qu'elle est colinéaire au vecteur propre commun à ces deux plans.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}' \in (\vec{N}_I, \vec{N}_{III}) \\ \vec{a}' \in (\vec{N}_I, \vec{N}_{II}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{a}' = \vec{N}_I$$

Ce résultat aurait aussi pu être dicté à partir de l'instant où l'on a obtenu la valeur du vecteur déformation pure dans la direction de la bissectrice. La formule obtenue démontre que la bissectrice est une direction principale associée à la valeur propre la plus grande.

$$D_p(M; \vec{a}') = \varepsilon(\vec{M}) \cdot \vec{a}' = \frac{k}{2} \vec{a}' \Leftrightarrow \vec{a}' = \vec{N}_I$$

Connaissant ainsi deux directions principales, on peut en déduire la troisième. On vérifie aisément qu'elle est associée à la valeur propre la plus petite.

$$\vec{N}_{III} = \vec{N}_I \wedge \vec{N}_{II} = \vec{a}' \wedge \vec{E}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$$

$$D_p(M; \vec{N}_{III}) = \varepsilon(\vec{M}) \cdot \vec{N}_{III} = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{2} \vec{N}_{III}$$

16.

Il reste à représenter le vecteur déformation pure dans la direction de la trissectrice. A nouveau, il faut travailler avec un vecteur unitaire.

$$\vec{b}' = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3)$$

Le résultat du calcul donne les composantes dans la base d'étude.

$$\overline{D_p(M; \vec{b}')} = \overline{\varepsilon(M)} \cdot \vec{b}' = \frac{k\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k\sqrt{3}}{6} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

Cette forme n'est pas aussi simple que dans les autres cas, aussi pour représenter le vecteur déformation pure nous allons tout d'abord calculer sa projection sur le vecteur d'étude ce qui nous donnera la composante normale.

$$N = \overline{D_p(M; \vec{b}')} \cdot \vec{b}' = \frac{k\sqrt{3}}{6} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) = \frac{k}{3}$$

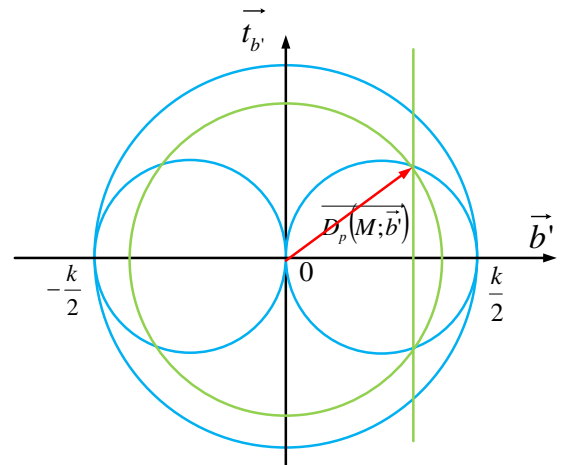
Ensuite on pourrait essayer de calculer la composante tangentielle mais la formule est compliquée.

$$T = \left\| \vec{b}' \wedge \overline{D_p(M; \vec{b}')} \wedge \vec{b}' \right\|$$

Pour obtenir le point désiré on peut se contenter de calculer la norme du vecteur déformation pure.

$$\left\| \overline{D_p(M; \vec{b}')} \right\| = \frac{k\sqrt{3}}{6} \left\| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right\| = \frac{k\sqrt{6}}{6}$$

Connaissant donc cette norme et la composante normale, on peut positionner le point extrémité du vecteur déformation pure. Il est à l'intersection de la verticale passant par la valeur de la composante normale sur l'axe horizontal et du cercle dont le centre est l'origine du repère et le rayon est la norme du vecteur déformation pure. Par construction, on constate que ce point est situé sur le petit cercle de Mohr. Après réflexion ce résultat est logique dès lors que l'on a vérifié que la direction de la trisectrice est orthogonale au vecteur propre à valeur propre minimale.

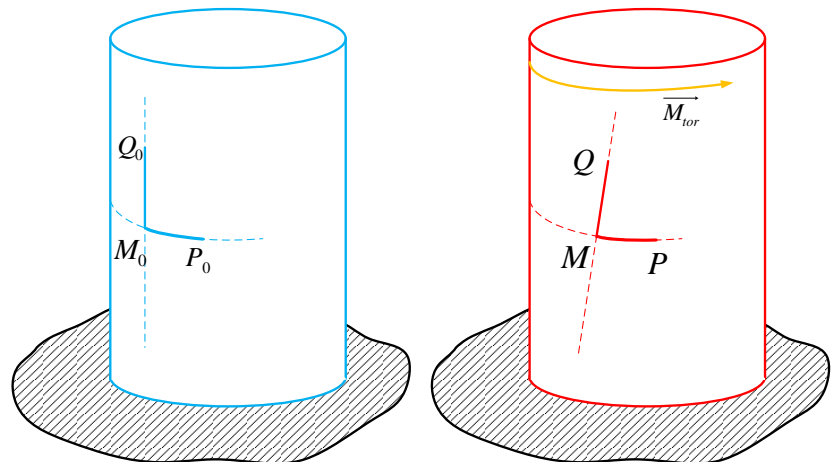


$$\vec{b}' \cdot \vec{N}_{III} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \right) = 0$$

17.

En complément à cette étude théorique, nous allons réfléchir sur un problème de torsion d'une poutre droite à section circulaire constante. On imagine que cette poutre est encastree à une extrémité et que l'on applique à l'autre extrémité un torseur d'effort réduit au centre de surface à un couple porté par l'axe de la poutre.

Avant l'application du chargement, on aura positionné trois points M_0 , P_0 et Q_0 à mi-hauteur de la poutre sur la surface extérieure. La direction donnée par deux points M_0 et P_0 est circonférentielle alors que la direction des deux points M_0 et Q_0 est axiale.

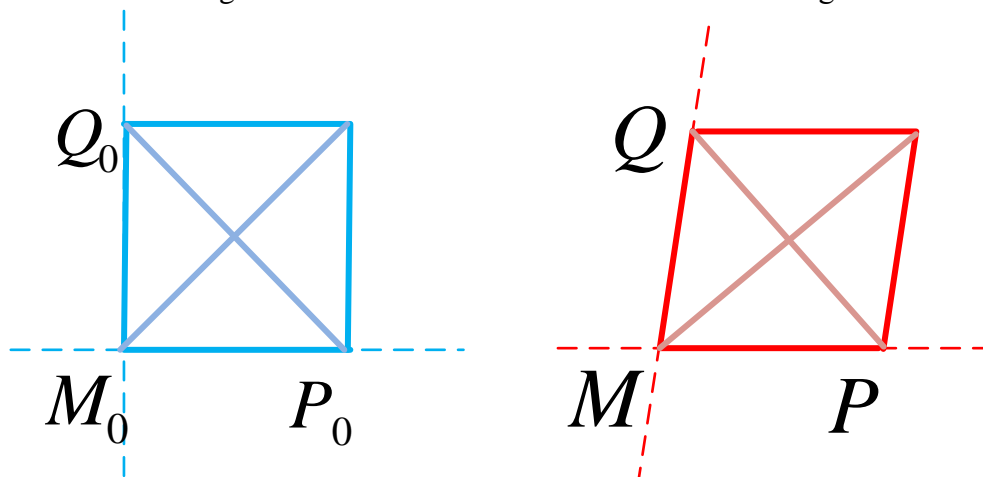


Après application du chargement ces points se sont déplacés. Ils restent sur la surface cylindrique. Les deux points M_0 et P_0 restent sur la même section horizontale et leurs déplacements ont la même valeur. Par contre le déplacement horizontal du point Q_0 est différente.

En considérant que les points sont infiniment proches et en développant le plan tangent au cylindre, on obtient la figure vu en début d'exercice.

On peut compléter cette figure en imaginant que ces points forment dans la configuration de référence un carré. Ce dernier va se retrouver sous une forme de losange dans la configuration actuelle. On constate que l'angle droit n'est pas conservé dans la transformation.

En ayant représenté les diagonales du carré dans la configuration de référence, on constate qu'elles restent orthogonales dans la configuration actuelle. On est dans les directions principales. De plus on constate un fort allongement selon une diagonale et un raccourcissement selon l'autre diagonale.



Concrètement, lorsque l'on sollicite en torsion un petit morceau de craie jusqu'à la rupture, on constate que cette dernière se fait selon une hélicoïdale présentant un angle de 45° avec la direction axiale. Perpendiculairement au plan de rupture, on trouve la direction principale associée à la valeur propre la plus forte. Ainsi que nous le dit le tricerclé de Mohr, c'est dans cette direction que l'on trouve la dilatation linéaire la plus forte.

18.

Cette petite application nous a montré que les résultats expérimentaux et théoriques sont en correspondance. Cela nous montre aussi l'importance des directions principales qui représentent les directions à valeurs de déformations extrêmes, c'est-à-dire les directions dans lesquelles on pourrait obtenir des ruptures.

3-1

CONTRAINTES

Lois de conservation

1.

Comme nous le constaterons ultérieurement, l'approche cinématique de l'étude d'un domaine ne peut être dissociée d'une approche statique qui conduit à la transmission des efforts à l'intérieur de ce domaine. Nous allons ainsi découvrir la notion de contraintes qui nous sera très utile pour dimensionner correctement les structures. Mais préalablement il nous faut établir certaines relations dont en particuliers les lois de conservation qui servent à exprimer le bilan d'une grandeur associée à un domaine.

2.

L'évolution d'un milieu continu au cours du temps ne peut être aléatoire. Elle est dictée par le respect de différentes lois ou principes de la physique.

Le principe fondamental de la mécanique est incontournable dans une étude associant les efforts et les déplacements. Mais il ne faut pas perdre de vue le premier principe de la thermodynamique qui permet d'associer la notion de travail d'une force à celle de chaleur par l'intermédiaire de l'énergie sous toute ses formes. Le second principe, représenté par une inégalité traduisant l'irréversibilité de toute évolution, fait aussi partie des grands classiques inévitables. Mais il existe aussi d'autres relations parfois négligées mais dont en définitive on ne peut se passer comme par exemple l'équation de continuité traduisant la conservation de la masse.

3.

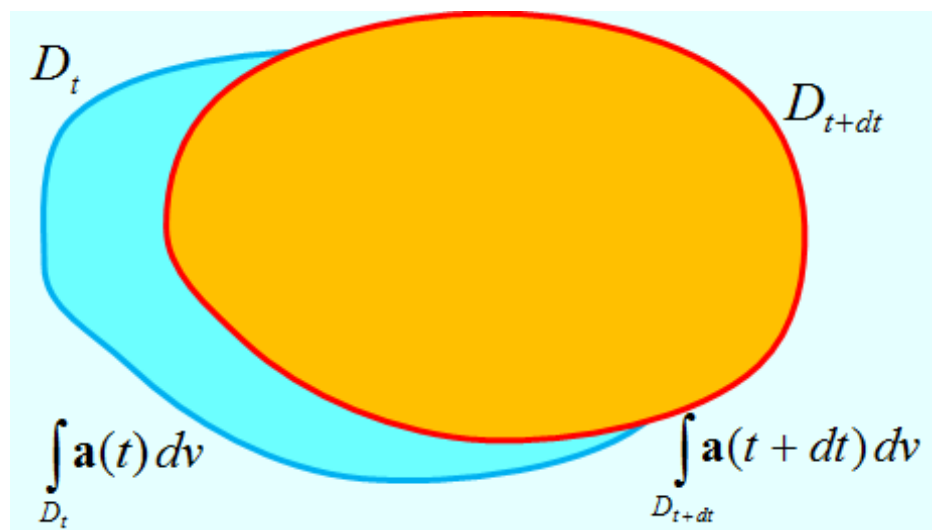
Tous ces principes s'écrivent sous forme de lois qui représentent la conservation de certaines entités physiques. L'écriture de ces lois conduit à des équations qui, selon les variables utilisés, prendront une forme ou une autre. Elles sont souvent présentées sous forme globale pour un domaine matériel complet. Mais elles peuvent aussi prendre une forme locale sur un domaine infinitésimal.

4.

Pour connaître les évolutions de nos différentes quantités au cours du temps, nous allons isoler un domaine à un instant donné.

La quantité à étudier étant distribuée dans le volume, elle est définie par une intégrale volumique.

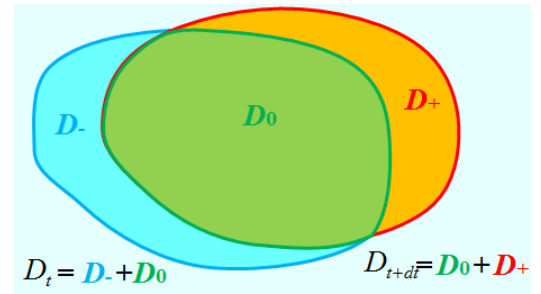
Nous devons ensuite regarder ce que devient cette quantité lorsque le domaine a évolué.



5.

Lors de cette évolution du domaine pendant un intervalle de temps très courts, on constate qu'il existe un domaine de chevauchement très important.

Entre les deux instants, on constate à la fois une perte et un gain de volume.



6.

Pour calculer notre variation entre les deux instants, nous allons calculer les intégrales à chaque instant en décomposant systématiquement le domaine d'intégration en deux parties.

$$\mathbf{J}_t = \int_{D_t} \mathbf{a}(t) dv = \int_{D_0} \mathbf{a}(t) dv + \int_{D_-} \mathbf{a}(t) dv$$

$$\mathbf{J}_{t+dt} = \int_{D_{t+dt}} \mathbf{a}(t+dt) dv = \int_{D_0} \mathbf{a}(t+dt) dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt) dv$$

Le calcul de la différence des intégrales conduit à trois domaines d'intégration. On constate alors que l'on en fait deux contributions de nature différente. Sur le domaine commun, c'est la variation de l'intégrande en fonction du temps qui est importante, alors que les deux autres intégrales traduisent le fait que le volume d'intégration évolue en fonction du temps.

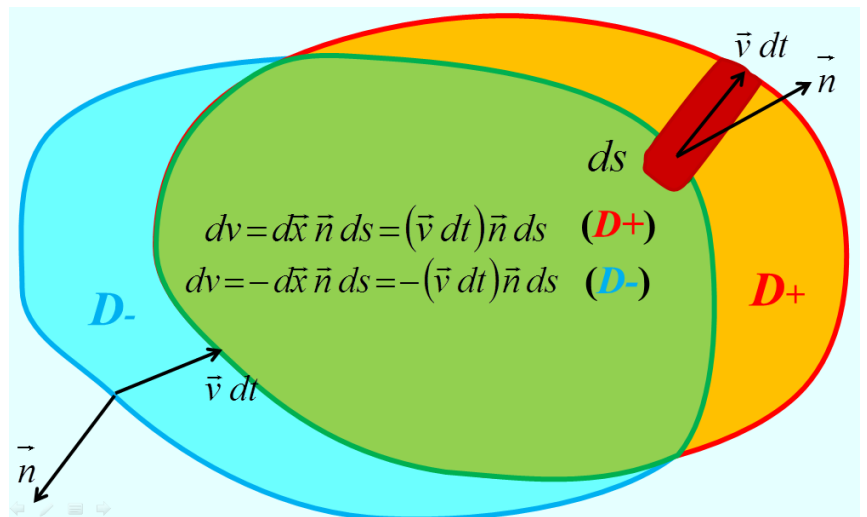
$$\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t = \int_{D_0} [\mathbf{a}(t+dt) - \mathbf{a}(t)] dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt) dv - \int_{D_-} \mathbf{a}(t) dv$$

$$\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t = \int_{D_0} [\mathbf{a}(t+dt) - \mathbf{a}(t)] dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt) dv - \int_{D_-} \mathbf{a}(t) dv$$

7.

Le calcul du volume élémentaire pour ces deux dernières intégrales peut se faire en considérant qu'il est généré par le déplacement entre les deux instants d'un élément de surface pris sur l'enveloppe du domaine initial.

Ce déplacement est obtenu en multipliant le vecteur vitesse du point central de l'élément de surface par l'intervalle de temps. On obtient alors un cylindre élémentaire. Son volume est calculé en multipliant sa hauteur par l'aire de sa base. Pour la hauteur, comme le déplacement n'est pas nécessairement perpendiculaire à la base, il faut la calculer comme étant le résultat du produit scalaire du vecteur déplacement avec le vecteur normal à la surface au point considéré. Ce calcul est valable pour l'augmentation de volume, mais pour la diminution, compte tenu que le produit scalaire donne un résultat négatif, il faut en prendre l'opposé pour obtenir le volume élémentaire.



$$\partial D_+ \cup \partial D_- = \partial D$$

8.

L'intervalle de temps étant infiniment court, on obtient des relations donnant la variation par rapport au temps.

L'association des surfaces générant l'augmentation de volume et la diminution de volume nous donnant la surface enveloppe fermée du domaine initial, on peut assembler les deux dernières intégrales entre elles, ce qui nous donne alors la formule traduisant la dérivée particulière d'une intégrale. Il est à noter que la fonction intégrante peut être toute à fait générale, scalaire, vectorielle ou tensorielle.

$$\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t = \int_{D_0} \left[\frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t} dt \right] dv + \int_{\partial D_+} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} dt ds + \int_{\partial D_-} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} dt ds$$

$$\frac{\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{a} dv = \int_{D_0} \frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t} dv + \int_{\partial D_+} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} ds + \int_{\partial D_-} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} ds$$

On voit clairement apparaître les deux contributions. D'une part la variation temporelle de la fonction intégrante, d'autre part la variation spatiale du domaine. Il convient de noter que cette dernière contribution peut être interprétée comme le flux au travers d'une surface fermée.

$$\frac{d}{dt} \int_D \mathbf{a} dv = \int_D \frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}(t) \vec{v} \vec{n} ds$$

9.

Cette notion de flux au travers d'une surface fermée nous conduit tout naturellement à évoquer le théorème de la divergence, ou encore théorème de Green Ostrogradski et qui s'énonce comme suit : le flux d'un champ tensoriel au travers d'une surface fermant un domaine est égal à l'intégrale de la divergence du champ tensoriel sur le domaine. C'est un théorème de conservation car il indique que ce qui entre ou sort dans un domaine contribue à la variation du stockage de l'entité dans le domaine.

$$\int_{\partial D} \mathbf{A} \vec{n} ds = \int_D \text{div} \mathbf{A} dv$$

Dans le cas où l'entité étudiée est une fonction scalaire, le théorème prend une forme légèrement différente :

$$\int_{\partial D} f \vec{n} ds = \int_D \overrightarrow{\text{grad}}(f) dv$$

Ce théorème étant valable quel que soit l'entité tensorielle, il peut être appliqué pour le calcul d'une résultante d'une répartition de pression constante sur un domaine.

$$\vec{R} = \int_{\partial D} (-p) \vec{n} ds$$

Cette pression étant constante, le vecteur gradient associé est nul et l'on constate que la résultante recherchée est nulle quel que soit la forme du domaine étudié.

$$\vec{R} = - \int_D \overrightarrow{\text{grad}}(p) dv = \vec{0}$$

10.

Profitions de cette digression dans le monde des mathématiques pour énoncer le théorème de l'intégrale nulle. Si, quel que soit un sous domaine pris à l'intérieur d'un domaine plus vaste, l'intégrale d'un champ tensoriel est nulle, alors ce champ tensoriel est nul sur l'ensemble du vaste domaine.

$$\text{Si } \int_D \mathbf{a} dv = 0 \quad \forall D' \subset D \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ sur } D$$

La démonstration peut se faire par l'absurde en considérant qu'il existe au moins un point à l'intérieur du vaste domaine pour lequel la fonction est non nulle. Par continuité, elle sera non nulle sur un domaine enveloppant le point et l'intégrale sur ce domaine ne sera pas nulle.

11.

Une loi de conservation exprime un bilan d'une grandeur associée à un domaine. On a une équation qui traduit le fait que la variation de la grandeur à l'intérieur du domaine est égale à la somme de la quantité produite à l'intérieur du domaine et de la quantité transitant au travers de la surface enveloppe du domaine. Nous avons une expression globale sur un domaine, mais avec les théorèmes précédemment vus, il est possible d'obtenir une expression locale valable en tout point du domaine.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{a} dv = \int_D \mathbf{a}_v dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}_s ds$$

\mathbf{A} : grandeur tensorielle

\mathbf{a} : densité volumique dans le domaine considéré

\mathbf{a}_v : densité volumique produite par unité de temps dans le domaine considéré

\mathbf{a}_s : densité surfacique associée au flux de \mathbf{A} entrant à travers de la frontière du domaine

12.

Les différentes formulations de l'équation de conservation de la masse, dite encore équation de continuité, sont une belle illustration de ces notions d'expressions globale et locale. Le principe de conservation de la masse postule que la variation de la masse d'un domaine au cours du temps est nulle.

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Par l'intermédiaire de la masse volumique, on passe à une intégrale de volume.

$$M = \int_D \rho dv \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_D \rho dv = 0$$

On peut alors utiliser la formule de la dérivée particulière

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0$$

Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale sur la surface du domaine en intégrale de volume.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_D \text{div}(\rho \vec{v}) dv = 0$$

Avec le théorème de l'intégrale nulle, on obtient alors une première forme locale de l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

On peut aussi utiliser les relations suivantes

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \rho} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \rho}$$

Ce qui nous donne une nouvelle forme locale de l'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

13.

Comme nous venons de le voir, les lois de conservation d'une entité définie sur un domaine doivent tenir compte à la fois de l'évolution de l'entité au cours du temps, mais aussi de l'évolution du domaine au cours du temps. En partant du constat que le domaine est déformable, il faut tenir compte de la variation des limites du domaine au cours du temps.

3-2 CONTRAINTES

Principe fondamental

1.

Ayant maintenant à notre disposition les outils nécessaires, nous allons pouvoir aborder le principe fondamental de la mécanique. Comme nous le verrons, ce dernier sera exprimé en chaque point du domaine, ce qui va nous conduire à des expressions locales fort différentes des expressions globales habituellement employées.

2.

Il existe plusieurs formulations permettant d'introduire la mécanique. Selon la présentation retenue, ce qui peut être un axiome peut devenir un théorème.

La formulation que nous retenons, qui la plus couramment utilisée en première présentation, conduira ultérieurement à démontrer le théorème des puissances virtuelles. Il convient toutefois de noter que nous employons la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique galiléen et non pas le torseur dynamique galiléen. La différence entre ces deux torseurs existe lorsque le domaine peut avoir une perte de masse, comme dans le cas de fusées qui transforment progressivement de la matière en énergie.

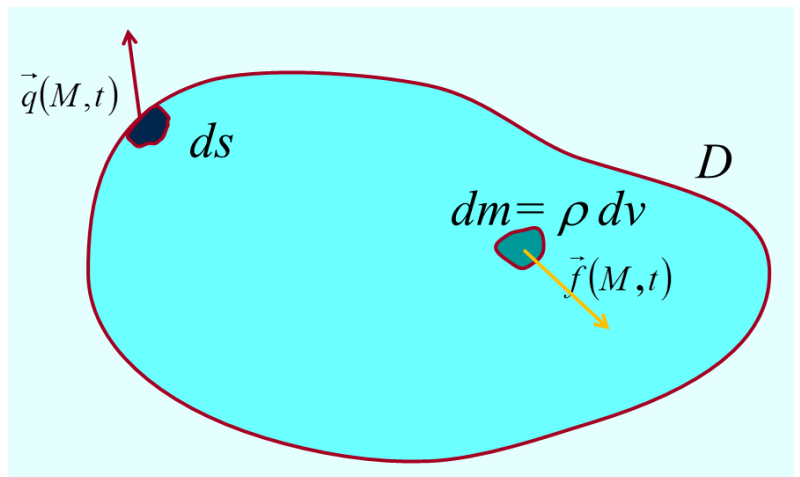
Il existe au moins un repère \underline{R}_g , dit galiléen, et une chronologie, dite absolue, tels que à chaque instant et pour toute partie D d'un système Σ la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique galiléen est égal au torseur des actions extérieures s'exerçant sur D .

3.

Il convient de préciser la nature des efforts exercés par l'extérieur sur le domaine d'étude. Ils sont de deux types différents.

Il y a des actions réparties dans le volume et exercées à distance. On y trouve l'action de la pesanteur ou les forces électromagnétiques. Elles sont représentées par une densité massique d'effort définie en chaque point du domaine $\vec{f}(M, t)$.

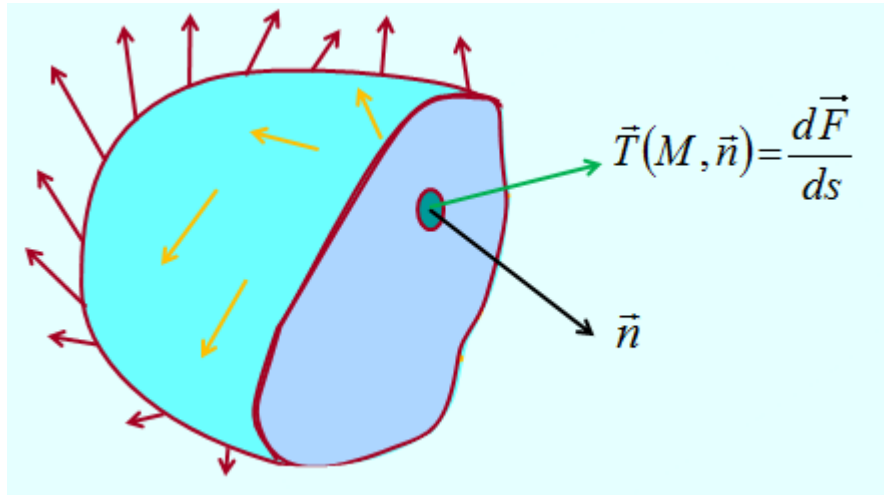
Puis il y a les actions réparties sur la surface délimitant le domaine. C'est par exemple la pression du fluide enveloppant le domaine ou encore les efforts dus aux liaisons cinématiques. Elles sont représentées par une densité surfacique d'effort définie en chaque point de la surface délimitant le domaine $\vec{q}(M, t)$.



4.

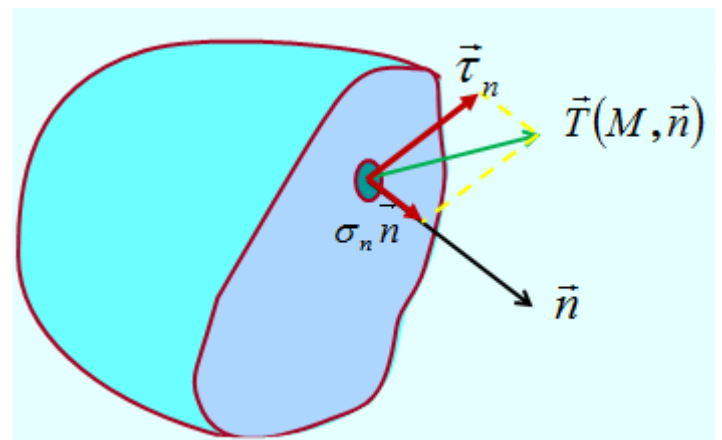
L'ensemble des efforts appliqués à notre domaine permet donc de satisfaire au principe fondamental de la mécanique. Toutefois, si l'on coupe le domaine en deux parties et que l'on isole une partie les seuls efforts considérés jusqu'à présent ne permettent pas nécessairement de respecter le principe fondamental de la mécanique.

Il convient donc d'envisager qu'il existe des efforts exercés par la partie enlevée sur la partie restante. On peut envisager des actions à distances, mais nous considérerons que ce sont des actions surfaciques créées par la rupture des liaisons interatomiques. Elles sont représentées par une densité surfacique de force $\vec{T}(M, \vec{n})$ appelée vecteur contrainte au point M dans la direction de la normale à la surface de coupe. Cette densité surfacique n'est fonction que de la normale extérieure au domaine pour le point d'étude. C'est le postulat de Cauchy.



5.

On peut alors définir la contrainte normale σ_n comme étant la projection sur la direction de la normale \vec{n} du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$. De même on a le vecteur contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ (encore appelé cisailon ou contrainte de cisaillement) qui représente le vecteur contrainte projeté dans le plan de la facette. On peut obtenir ces composantes par de simples relations. Une contrainte normale positive traduit localement un état de traction de la matière. Si au contraire elle est négative, nous avons localement un état de compression.



$$\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{n} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$$

6.

Les composantes du vecteur contrainte représentent une force rapportée à une surface. Elles sont donc homogènes à une pression et vont s'exprimer en pascal ou plus généralement en mégapascal.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{ds}$$

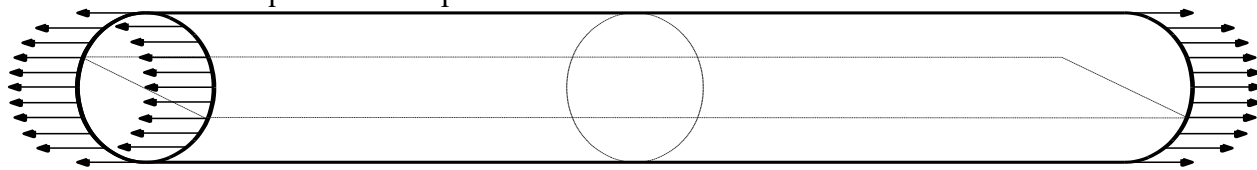
Le vecteur contrainte ainsi déterminé s'applique sur la structure dans sa configuration actuelle, c'est-à-dire déformée. C'est une version eulérienne de ce vecteur. Nous avons fait le choix d'une axiomatique privilégiant l'application d'une force infinitésimale sur l'élément de surface de contact. Ce choix conduit à des problèmes d'interprétation des résultats lorsque l'on est en présence de forts champs magnétiques. Dans ce cas, il faudra aussi considérer l'application d'un moment infinitésimal sur l'élément de contact.

Si nous avons isolé l'autre partie de notre domaine, nous aurions trouvé des efforts opposés du fait du principe des actions mutuelles.

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

7.

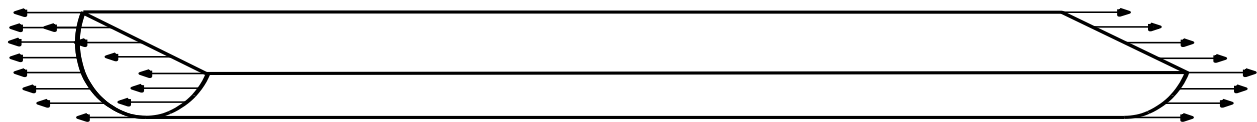
Ce qu'il faut bien réaliser, c'est que le vecteur contrainte est essentiellement dépendant du plan de séparation des deux parties, plan orienté par un vecteur normal. Pour s'en rendre compte nous allons nous intéresser à un domaine cylindrique sollicité sur ses deux bases par des distributions d'efforts uniformément répartis et opposés. Ce domaine est immobile et considéré en équilibre. On obtient une sollicitation de traction. Imaginons que l'on veuille couper le domaine en deux parties égales. La première coupe sera faite par un plan de section droite, la deuxième sera faite par un plan méridien. Ces deux plans contiennent le point central du domaine qui sera notre point d'étude.



Pour la première coupe, il est nécessaire d'envisager une distribution de vecteurs contrainte non nuls dans le plan de coupe si l'on veut que le domaine isolé soit encore en équilibre.



Par contre, pour la deuxième coupe, on se rend compte que notre domaine est en équilibre sans l'ajout de vecteur contrainte.

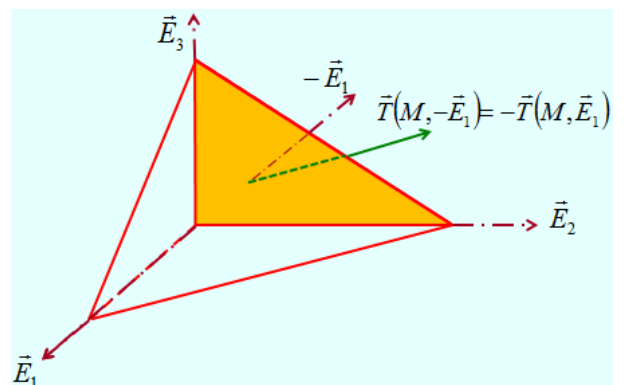


Ainsi, il existe en chaque point d'étude autant de vecteurs contrainte que l'on envisage de plans de coupe. Cette infinité de vecteurs nous interpelle et nous allons essayer de définir l'état de contrainte en un point par une autre notion.

8.

Pour cela, nous allons établir la relation existante entre le vecteur contrainte et le vecteur normal associé au plan de coupe. A l'intérieur d'un domaine en équilibre, on isole un tétraèdre infinitésimal dont trois faces sont perpendiculaires aux trois vecteurs d'une base orthonormée. On s'intéresse à la face orthogonale au premier vecteur de la base. Les efforts appliqués par l'extérieur sur cette face font apparaître le vecteur contrainte.

A ce vecteur, on peut associer sa composante normale et sa composante tangentielle. Cette dernière est contenue dans la face d'étude.



On peut alors représenter ce vecteur par ses composantes dans la base. Ces composantes seront écrites avec une notation indicielle naturelle. Le premier indice est celui associé à la normale de la face d'étude et le deuxième indice est celui du vecteur de projection. Lorsque les deux indices sont confondus, on obtient une contrainte normale.

$$\vec{T}(M, \vec{E}_1) = \sigma_n \vec{E}_1 + \tau_n$$

$$\vec{T}(M, \vec{E}_1) = \sigma_{11} \vec{E}_1 + (\sigma_{12} \vec{E}_2 + \sigma_{13} \vec{E}_3)$$

9.

On trouve un résultat similaire sur la deuxième face. La composante normale du vecteur contrainte est portée par le deuxième vecteur de la base.

$$\vec{T}(M, \vec{E}_2) = (\sigma_{21} \vec{E}_1) + \sigma_{22} \vec{E}_2 + (\sigma_{23} \vec{E}_3)$$

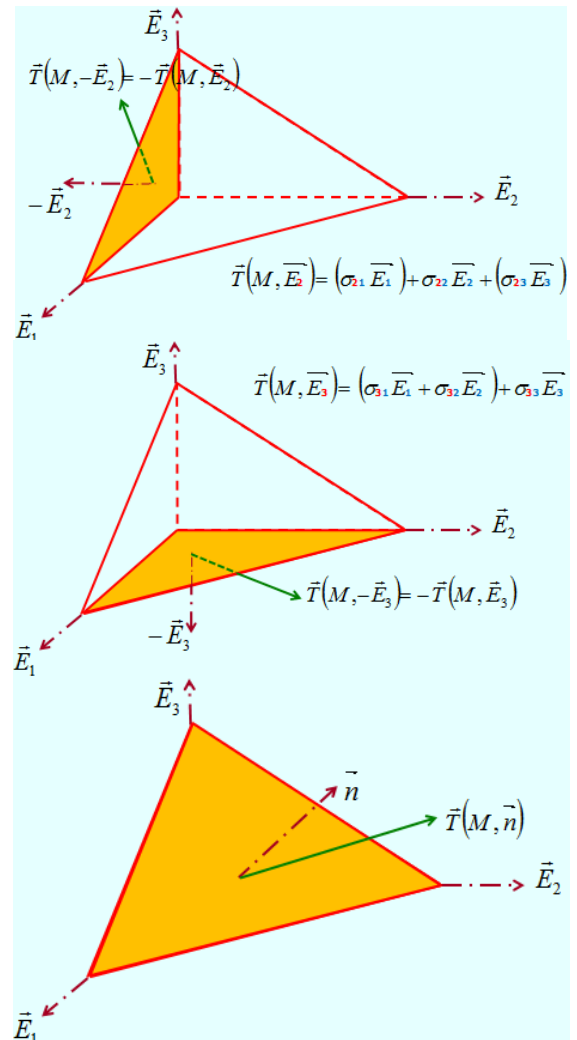
10.

La troisième face donne bien entendu un résultat similaire. On obtient un ensemble de neuf composantes pour représenter les vecteurs contraintes sur ces trois faces.

$$\vec{T}(M, \vec{E}_3) = (\sigma_{31} \vec{E}_1 + \sigma_{32} \vec{E}_2) + \sigma_{33} \vec{E}_3$$

11.

Il reste à étudier la quatrième face orientée par un vecteur unitaire non colinéaire aux vecteurs de base. On peut bien entendu lui associer un vecteur contrainte spécifique.



12.

Pour obtenir les forces associées à ces faces, il faut multiplier ces vecteurs contrainte par l'aire des surfaces sur lesquels ils s'appliquent.

Tout d'abord, il convient de faire une remarque à partir de l'expression issue du théorème de la divergence appliqué à une fonction scalaire.

$$\int_{\partial D} f \vec{n} ds = \int_D \overrightarrow{\text{grad}}(f) dv$$

Si cette fonction est constante, on obtient un résultat très intéressant sur la surface enveloppant un domaine. En additionnant tous les vecteurs associés aux éléments de surface d'un domaine fermé, on obtient un vecteur nul.

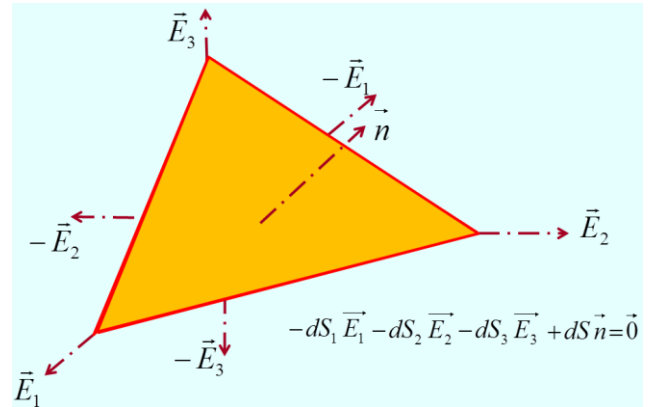
$$\int_{\partial D} f \vec{n} ds = f \int_{\partial D} \vec{n} ds = \int_D \overrightarrow{\text{grad}}(f) dv = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\partial D} \vec{n} ds = \vec{0}$$

13.

Regardons ce que donne l'application de ce résultat à notre volume tétraédrique élémentaire. Les surfaces étant élémentaires, on peut omettre le signe d'intégration. Avec des notations implicites, notre équation s'écrit au fur et à mesure des contributions des différentes surfaces.

Par projection sur les vecteurs de base, on peut alors en déduire une relation intéressante.

$$n_i dS = dS_i$$



14.

Notre domaine étant infinitésimal, on néglige dans l'expression du principe fondamental de la mécanique toutes les contributions volumiques qui sont d'un ordre supérieur par rapport aux contributions surfaciques. D'autre part, on peut aussi omettre les signes d'intégration.

$$\vec{0} \approx \vec{T}(M, \vec{n})dS + \vec{T}(M, -\vec{E}_1)dS_1 + \vec{T}(M, -\vec{E}_2)dS_2 + \vec{T}(M, -\vec{E}_3)dS_3$$

Avec la relation que nous venons de démontrer, on peut obtenir une relation simplifiée.

$$\vec{0} \approx (\vec{T}(M, \vec{n}) + n_1 \vec{T}(M, -\vec{E}_1) + n_2 \vec{T}(M, -\vec{E}_2) + n_3 \vec{T}(M, -\vec{E}_3))dS$$

Et le principe des actions mutuelles nous donne une relation très intéressante. Avec cette dernière, on constate qu'à partir de la connaissance des vecteurs contraintes associés aux trois vecteurs d'une base, on peut calculer le vecteur contrainte dans n'importe quelle direction.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_1 \vec{T}(M, \vec{E}_1) + n_2 \vec{T}(M, \vec{E}_2) + n_3 \vec{T}(M, \vec{E}_3) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{T}(M, \vec{n}) = n_i \vec{T}(M, \vec{E}_i)$$

Dans une base cartésienne, les composantes du vecteur contrainte dans une direction quelconque sont déduites par une relation matricielle.

$$\begin{cases} T_1 = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31} \\ T_2 = n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32} \\ T_3 = n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33} \end{cases}$$

On en déduit une formulation indicielle : $T_i = \sigma_{ji} n_j$

Ce qui peut se traduire par une relation tensorielle qui fait apparaître le tenseur des contraintes ou encore tenseur de Cauchy. Il est fonction du point d'étude.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma(M)}} \vec{n}$$

15.

Ce tenseur contrainte permet de connaître la distribution des efforts à l'intérieur de notre domaine. Il est donc dépendant des charges appliquées, mais aussi de la cinématique du milieu étudié. Les équations de la dynamique vont nous permettre d'établir la relation de dépendance.

Pour écrire le principe fondamental de la dynamique, il faut exprimer le torseur des efforts appliqués par l'extérieur. Comme nous l'avons déjà dit, nous aurons deux contributions.

La première concerne les actions à distance. Elles sont réparties dans tout le volume et elles sont schématisées par une distribution massique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \vec{f}(M, t) dm \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M, t) dm \end{array} \right\}$$

La deuxième contribution est celle des actions de contact. Elles sont réparties sur tout ou partie de la surface délimitant le domaine et elles sont schématisées par une distribution surfacique qui n'est autre que le vecteur contrainte.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial D} \vec{T}(P, \vec{n}) dS \\ \int_{\partial D} \vec{OP} \wedge \vec{T}(P, \vec{n}) dS \end{array} \right\}$$

Dans l'autre membre de l'égalité, nous trouvons la variation par rapport au temps du torseur cinétique galiléen.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_D \vec{V}(M, t / R_g) dm \\ \frac{d}{dt} \int_D \vec{OM} \wedge \vec{V}(M, t / R_g) dm \end{array} \right\}$$

Si nous travaillons avec un système à masse conservative, en variables de Lagrange, il est équivalent au torseur dynamique galiléen.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm \end{array} \right\}$$

16.

L'application du Principe Fondamental de la Mécanique assure un lien entre tous ces torseurs. Pour l'instant nous avons une expression globale valable pour tout domaine matériel. On constate que l'on a bien une expression sous forme de loi de bilan. Pour deux torseurs, l'intégration se fait sur l'ensemble du domaine, mais pour le torseur des efforts extérieur de contact, l'intégration est faite sur la surface fermée enveloppant le domaine. L'utilisation du théorème de la divergence va nous permettre de passer à une intégration sur l'ensemble du domaine.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm = \int_D \vec{f}(M, t) dm + \int_{\partial D} \vec{T}(P, \vec{n}) dS \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm = \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M, t) dm + \int_{\partial D} \vec{OP} \wedge \vec{T}(P, \vec{n}) dS \end{array} \right.$$

Pour cela, sur la résultante, nous allons utiliser le lien entre le vecteur contrainte et le tenseur des contraintes. Le deuxième membre représentant le flux du tenseur des contraintes au travers de notre surface fermée, l'application du théorème de la divergence nous permet de passer à une intégrale volumique.

$$\int_{\partial D} \vec{T}(P, \vec{n}) dS = \int_{\partial D} \vec{\sigma} \vec{n} dS = \int_D \text{div} \vec{\sigma} dv$$

Notre équation de résultante prend alors une forme avec trois intégrales portant sur le même domaine.

$$\int_D \vec{\gamma}(M, t / R_g) dm = \int_D \overline{\text{div}} \sigma dv + \int_D \vec{f}(M, t) dm$$

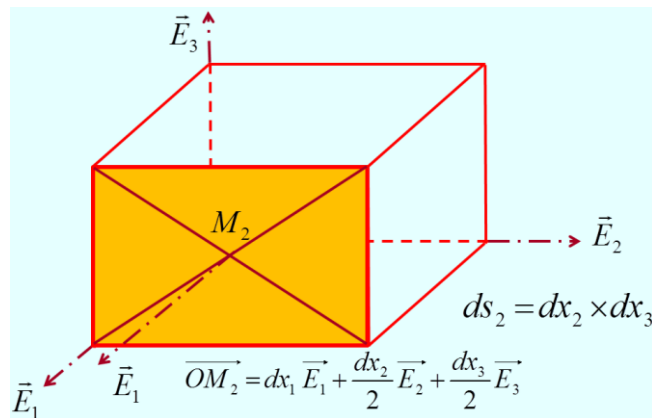
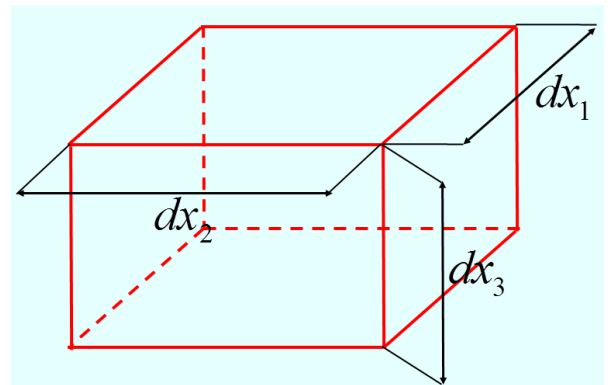
En passant les intégrales massiques à des intégrales volumiques et en utilisant le théorème de l'intégrale nulle, on obtient une expression simplifiée. C'est une équation valable en tout point de notre domaine. Elle représente l'équation de résultante du Principe Fondamental de la Mécanique.

$$\rho \vec{\gamma}(M, t / R_g) = \overline{\text{div}} \sigma + \rho \vec{f}(M, t)$$

17.

L'équation que nous venons d'obtenir est primordiale pour notre cours de mécanique. Elle montre bien le lien entre le tenseur des contraintes, les actions à distance exercées par l'extérieur sur notre domaine et le mouvement de notre domaine.

Pour convaincre l'auditeur un peu septique devant la démonstration employant le théorème de la divergence, nous allons refaire cette démonstration en isolant un domaine parallélépipédique.



On positionne un repère par rapport au domaine, l'origine du repère étant confondue avec un sommet, les arêtes définissant les axes. Le domaine est infiniment petit. Il est donc délimité par six surfaces rectangulaires parallèles entre elles deux à deux.

Pour chaque face, nous pouvons définir la normale extérieure au domaine, la position du centre de surface, déterminée par les coordonnées dans le repère, et l'aire de la surface,

18.

Sur la face étudiée s'applique un vecteur contrainte. Il est obtenu en faisant le produit du tenseur des contraintes défini au centre de surface par le vecteur normal à la surface.

$$\overline{T}(M_2, \vec{E}_1) = \overline{\sigma}(M_2) \cdot \vec{E}_1$$

La première composante de ce tenseur contrainte est obtenue en tenant compte des augmentations de la fonction au point origine, augmentations dues aux différences de positionnement des deux points.

$$\sigma_{11}(M_2) = \sigma_{11}(dx_1, dx_2/2, dx_3/2) = \sigma_{11}(0, 0, 0) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}$$

On a un résultat similaire pour toutes les autres composantes

$$\sigma_{ij}(M_2) = \sigma_{ij}(0, 0, 0) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}$$

19.

En regardant ce qui se passe pour chaque face du domaine, on obtient le tableau suivant. L'auditeur un peu curieux pourra compléter ce tableau en représentant les cinq autres composantes du tenseur des contraintes. Avec ce tableau, en multipliant dans une colonne l'aire par la composante du vecteur contrainte, on obtient la composante force associée. Ensuite, il faut additionner toutes ces composantes forces pour obtenir la résultante des forces de surface appliquées à notre domaine. Comme on peut le constater facilement, nous allons avoir de nombreuses simplifications.

Point	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Coordonnée	$\begin{cases} 0 \\ dx_2/2 \\ dx_3/2 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1 \\ dx_2/2 \\ dx_3/2 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1/2 \\ 0 \\ dx_3/2 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1/2 \\ dx_2 \\ dx_3/2 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1/2 \\ dx_2/2 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} dx_1/2 \\ dx_2/2 \\ dx_3 \end{cases}$
normale	$-\vec{E}_1$	$+\vec{E}_1$	$-\vec{E}_2$	$+\vec{E}_2$	$-\vec{E}_3$	$+\vec{E}_3$
aire	$dx_2 dx_3$	$dx_2 dx_3$	$dx_3 dx_1$	$dx_3 dx_1$	$dx_1 dx_2$	$dx_1 dx_2$
Première composante du vecteur contrainte	$-\sigma_{11}(0,0,0) \frac{\partial \sigma_{11} dx_2}{\hat{\alpha}_2 2} - \frac{\partial \sigma_{11} dx_3}{\hat{\alpha}_3 2}$	$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\hat{\alpha}_1} dx_1 + \frac{\partial \sigma_{11} dx_2}{\hat{\alpha}_2 2} + \frac{\partial \sigma_{11} dx_3}{\hat{\alpha}_3 2}$	$-\sigma_{21}(0,0,0) \frac{\partial \sigma_{21} dx_1}{\hat{\alpha}_1 2} - \frac{\partial \sigma_{21} dx_3}{\hat{\alpha}_3 2}$	$\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\hat{\alpha}_2} dx_2 + \frac{\partial \sigma_{21} dx_3}{\hat{\alpha}_3 2} + \frac{\partial \sigma_{21} dx_1}{\hat{\alpha}_1 2}$	$-\sigma_{31}(0,0,0) \frac{\partial \sigma_{31} dx_1}{\hat{\alpha}_1 2} - \frac{\partial \sigma_{31} dx_2}{\hat{\alpha}_2 2}$	$\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\hat{\alpha}_3} dx_3 + \frac{\partial \sigma_{31} dx_1}{\hat{\alpha}_1 2} + \frac{\partial \sigma_{31} dx_2}{\hat{\alpha}_2 2}$

20.

En regardant la projection sur le premier vecteur de notre base, on obtient un résultat simple pour la résultante due aux actions extérieures de contact. Le domaine étant infinitésimal, on peut négliger l'intégration.

$$\vec{E}_1 \cdot \int_{\partial D} \overline{T(\vec{M}; \vec{n})} ds = \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Le calcul de la projection de la résultante due aux actions extérieures à distance n'est pas compliqué.

$$\vec{E}_1 \cdot \int_{\partial D} \rho \overline{f(\vec{M})} dv = \rho f_1 dx_1 dx_2 dx_3$$

Et il en va de même pour le calcul de la projection de la résultante dynamique galiléenne

$$\vec{E}_1 \cdot \int_{\partial D} \rho \overline{\gamma(\vec{M})} dv = \rho \gamma_1 dx_1 dx_2 dx_3$$

L'application du Principe Fondamental de la mécanique nous donne alors une équation scalaire et bien entendu, les calculs faits en projection sur les deux autres axes du repère donnent des résultats similaires

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = \rho \gamma_1$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 = \rho \gamma_2$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = \rho \gamma_3$$

Ce qui se traduit par l'équation locale de la résultante du Principe Fondamental de la mécanique

$$\vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \rho \vec{f}(M, t) = \rho \vec{\gamma}(M, t / R_g)$$

L'avantage de cette démonstration est qu'elle permet d'arriver rapidement résultat concernant l'équation du moment du Principe Fondamental de la mécanique. En effet, en écrivant cette équation au centre de notre domaine, comme de nombreuses forces passent par ce point, nous avons beaucoup de simplifications et l'on constate que l'équation de moment sera réalisée à la condition que le tenseur des contraintes soit symétrique, c'est-à-dire égal à sa transposée.

$$\overline{\overline{\sigma}}^T = \overline{\overline{\sigma}}$$

Ainsi, comme le tenseur des déformations, le tenseur des contraintes sera représenté par six composantes indépendantes. Ces deux équations représentent localement le principe fondamental de la mécanique.

$$\vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \rho \vec{f}(M, t) = \rho \vec{\gamma}(M, t / R_g) \qquad \overline{\overline{\sigma}}^T = \overline{\overline{\sigma}}$$

21.

Avec cette leçon, nous avons mis en application le principe fondamental de la mécanique qui était initialement donné sous une forme globale portant sur un domaine complet. Nous venons d'obtenir des expressions locales, l'une traduisant l'équation de résultante et l'autre traduisant l'équation de moment. Cette dernière démontre que le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique.

3-3 CONTRAINTES

Propriétés des contraintes

1.

Ainsi que nous venons de le voir, l'état de contrainte, tout comme l'état de déformation, est représenté par un tenseur symétrique du second ordre. Nous allons donc pouvoir exploiter les propriétés caractéristiques de ces tenseurs pour obtenir des résultats intéressants.

2.

La relation entre le vecteur contrainte et le tenseur des contraintes nous montre que nous avons affaire à une application linéaire indépendante de la base dans laquelle on l'exprime. C'est la propriété caractéristique des tenseurs.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}} \vec{n}$$

Si on ne change pas un état tensoriel en changeant de base, on peut toutefois remarquer que les composantes du tenseur des contraintes sont étroitement liées à la base de représentation.

$$\sigma_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{T}(M; \vec{E}_j) = \vec{E}_i \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{E}_j$$

Dans une autre base, nous pouvons utiliser le même type de formule pour exprimer une composante courante du tenseur contrainte

$$\sigma'_{ij} = \vec{E}'_i \cdot \vec{T}(M; \vec{E}'_j) = \vec{E}'_i \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{E}'_j$$

On peut alors utiliser les formules de changement de base pour les vecteurs unitaires

$$\vec{E}'_i = Q_{ij} \vec{E}_j$$

Ce qui nous permet de faire apparaître la matrice de changement de base avec ses propriétés particulières

$$Q_{ij} Q_{kj} = Q_{ji} Q_{jk} = \delta_{ik}$$

En définitive, nous pouvons alors obtenir une formule générale nous permettant de calculer les composantes dans n'importe quelle base, sous réserve de les connaître au moins dans une base.

$$\sigma'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} \sigma_{kl}$$

3.

De toutes les bases, il en est au moins une qui est particulière. Le vecteur contrainte associé à un vecteur de cette base est colinéaire au vecteur initial, le coefficient de colinéarité est appelé contrainte principale.

$$\vec{T}(M, \vec{E}_I) = \overline{\overline{\sigma}} \vec{E}_I = \sigma_I \vec{E}_I$$

Le calcul de ces contraintes principales, qui ne sont rien d'autre que les valeurs propres du tenseur des contraintes, passe par l'annulation d'un déterminant

$$(\overline{\overline{\sigma}} - \sigma_I \overline{\overline{I}}) \vec{E}_I = \vec{0} \Rightarrow \det(\overline{\overline{\sigma}} - \sigma_I \overline{\overline{I}}) = 0$$

Dans la base des vecteurs propres $(\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III})$, la matrice représentant l'état des contraintes est diagonale. Les composantes tangentielles sont nulles

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} (\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III})$$

Le tenseur des contraintes étant symétrique, il est possible de démontrer cette relation, dite égalité de Cauchy, valable avec n'importe quel vecteur unitaire.

$$\vec{n} \cdot \overline{T(M; \vec{m})} = \vec{m} \cdot \overline{T(M; \vec{n})}$$

En appliquant la relation précédente avec deux vecteurs propres, on peut constater que, si les valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont nécessairement orthogonaux.

$$\vec{E}_I \cdot \overline{T(M; \vec{E}_{II})} = \vec{E}_{II} \cdot \overline{T(M; \vec{E}_I)} \Rightarrow (\sigma_I - \sigma_{II}) \vec{E}_I \cdot \vec{E}_{II} = 0$$

4.

Comme dans le cas du tenseur des déformations, la décomposition en partie sphérique et déviatorique est unique dès lors que l'on exprime que le tenseur sphérique est proportionnel au tenseur identité et que le tenseur déviatorique a une trace nulle.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_S + \underline{\underline{\sigma}}_D \quad \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_D) = 0 \quad \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_S) \quad \underline{\underline{\sigma}}_S = \left(\frac{\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}}{3} \right) \underline{\underline{I}}$$

L'opposé du coefficient de proportionnalité entre le tenseur sphérique et le tenseur identité s'appelle la pression. Cette notion est bien entendu très utile dans le cas des fluides, mais elle aussi exploitée pour des solides, en particulier dans un comportement plastique.

$$p = -\frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$$

5.

Nous avons vu que le calcul des valeurs propres passe par l'annulation d'un déterminant.

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

Toutefois comme le résultat doit toujours être le même quel que soit la base initialement retenue, le polynôme sera identique. Les coefficients de ce polynôme sont donc invariants par tous changements de base. Le polynôme étant du troisième degré, nous avons donc trois invariants. Le premier invariant est la trace du tenseur des contraintes alors que le troisième est son déterminant. Le deuxième invariant est plus délicat à calculer.

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_S) \\ I_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \right)^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \right) \\ I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}}) \end{cases}$$

On peut aussi trouver des expressions indicielles valables dans toutes bases.

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I \\ I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{cases}$$

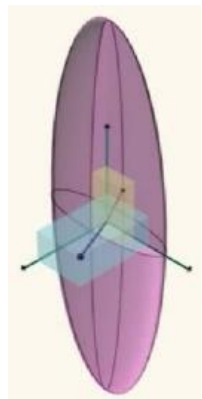
Dans le cas du tenseur déviateur des contraintes, le premier invariant est bien évidemment nul. Nous verrons ultérieurement que son deuxième invariant joue un rôle particulier.

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\overline{\overline{\sigma_D}})^2 - \text{tr}(\overline{\overline{\sigma_D}})^2 \right) = -\frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]$$

6.

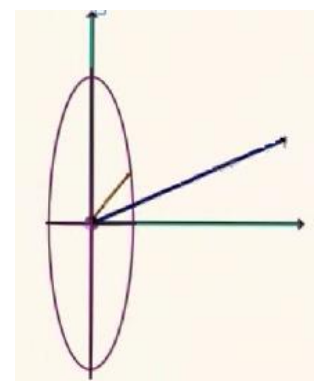
Pour le tenseur des contraintes, on peut bien entendu envisager les mêmes représentations graphiques que pour le tenseur des déformations. La première représentation est celle tridimensionnelle de l'ellipsoïde de Lamé.

Nous allons examiner cette représentation en commençant par concevoir une base orthonormée. On imagine que cette base est la base des vecteurs propres d'un état de contraintes dont on connaît les contraintes principales. Dans ce repère, on peut représenter un vecteur unitaire connu par ses cosinus directeur. Il est aussi possible de positionner le vecteur contrainte associé à ce vecteur unitaire. Toutes ses composantes sont connues.



L'extrémité de ce vecteur se trouve sur l'ellipsoïde de Lamé. Les vecteurs propres de l'état de contrainte présentent aussi les directions principales de l'ellipsoïde. L'intersection de cet ellipsoïde avec les plans principaux nous donnent trois ellipses.

On se rapproche pour examiner cette distribution de plus près. Lorsque le vecteur unitaire évolue, le vecteur contrainte évolue lui aussi. En particulier, lorsque le vecteur unitaire appartient à un plan principal, le vecteur contrainte associé se trouve lui aussi dans ce plan. Son extrémité est sur l'ellipse associée au plan. Et lorsque le vecteur unitaire est confondu avec un vecteur propre, le vecteur contrainte est aussi colinéaire avec ce vecteur propre. On peut aussi regarder en se positionnant perpendiculairement à un plan principal. Cela nous permet de suivre l'évolution en grandeur réelle.



7.

Et bien entendu, il est aussi possible d'utiliser la représentation plane du tri cercle de Mohr.

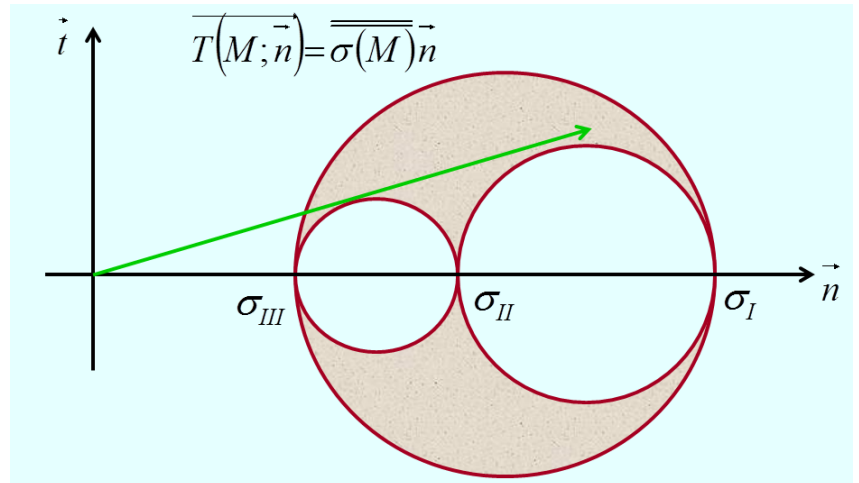
Elle est obtenue en positionnant trois cercles tangents entre eux. Les diamètres sont égaux à la différence de deux valeurs propres et les centres sont situés sur le même axe.

De fait, les intersections des cercles avec cet axe nous donnent les valeurs des contraintes principales.

Pour un vecteur unitaire quelconque, l'extrémité du vecteur contrainte associé se trouve à l'intérieur du tri-cercle.

La représentation de Mohr permet d'avoir directement la contrainte normale et le vecteur contrainte tangentielle en vraie grandeur. On peut bien entendu avoir ces entités par des formules.

$$\begin{cases} (\vec{n} \cdot \overline{T(M; \vec{n})}) \vec{n} = \sigma_n(M; \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{n} \wedge \overline{T(M; \vec{n})} \wedge \vec{n} = \tau_n(M; \vec{n}) \end{cases}$$



Par convention on ordonne les contraintes principales de la plus grande vers la plus petite.

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

La plus grande contrainte principale est donc la contrainte normale maximale.

$$(\sigma_n)_{MAX} = \sigma_I$$

Le rayon du plus grand des trois cercles donne le module de la contrainte tangentielle maximale.

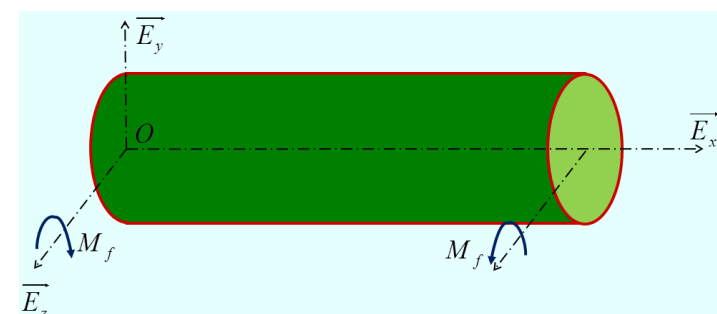
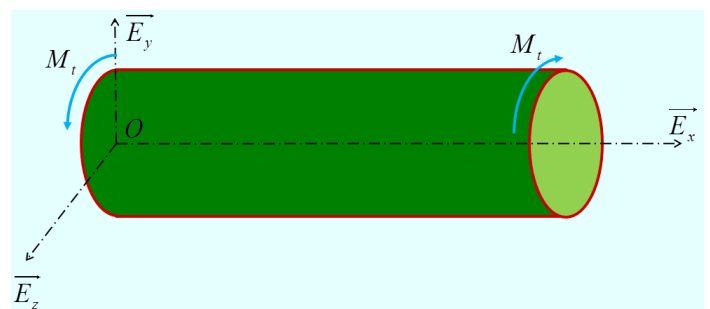
$$(\tau_n)_{MAX} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

8.

En application, nous allons étudier une poutre droite de section circulaire. On lui associe un repère cartésien.

Dans un premier temps nous considérerons que cette poutre est sollicitée en torsion. Nous admettrons qu'en un point quelconque de la poutre, dans une base cylindrique naturelle, le tenseur des contraintes n'a qu'une composante de cisaillement.

$$\overline{\overline{\sigma_T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta)$$



D'autre part, nous appliquons une sollicitation de flexion pure. Cette flexion prise séparément nous donne un tenseur contrainte caractérisé par une composante normale.

$$\overline{\overline{\sigma_F}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta)$$

Par application du principe de superposition, le tenseur des contraintes pour la sollicitation combinée de torsion flexion est obtenue par addition terme à terme des composantes des tenseurs des sollicitations simples.

$$\overline{\overline{\sigma}}_{T+F} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta)$$

9.

La structure de ce tenseur contrainte est particulière. On peut en effet facilement vérifier que l'axe radial du repère cylindrique est un axe principal de contrainte, la contrainte principale associée étant nulle.

$$T(M; \vec{E}_r) = \overline{\overline{\sigma}}_{T+F} \cdot \vec{E}_r = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta) = 0 \cdot \vec{E}_r$$

On peut en déduire que le plan vectoriel contenant le vecteur axial et le vecteur orthoradial est un plan principal. Il y a donc un des trois cercles de Mohr qui est associé à ce plan. Nous allons construire ce cercle en définissant certains de ses points qui représentent l'extrémité du vecteur contrainte image d'un vecteur unitaire pris dans le plan.

10.

Calculons par exemple le vecteur contrainte image du vecteur axial de notre base.

$$T(M; \vec{E}_x) = \overline{\overline{\sigma}}_{T+F} \cdot \vec{E}_x = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ \tau \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta) = \sigma \cdot \vec{E}_x + \tau \cdot \vec{E}_\theta$$

On va représenter ce vecteur sur le plan de Mohr. Pour cela, on calcule la composante normale du vecteur.

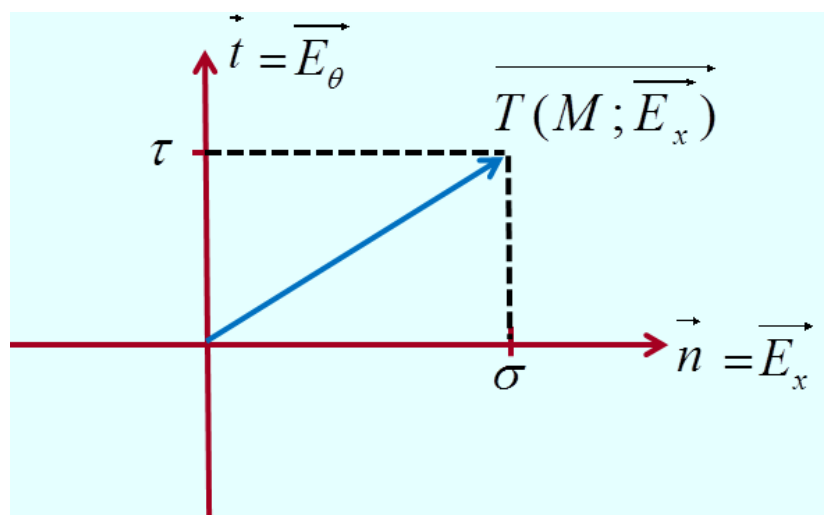
$$T(M; \vec{E}_x) \cdot \vec{E}_x = \sigma$$

Cette composante se trouve sur l'axe normal qui est porté par le vecteur axial.

Après avoir enlevé au vecteur image la composante normale, il reste la composante tangentielle. En l'occurrence, elle est portée par le vecteur orthoradial.

$$T(M; \vec{E}_x) - \sigma \vec{E}_x = \vec{\tau}_n = \tau \vec{E}_\theta$$

On peut alors représenter le vecteur image du vecteur axial. Ce qui nous donne un premier point situé le cercle de Mohr associé au plan principal.



11.

Pour trouver un deuxième point du cercle, nous allons utiliser le vecteur orthoradial et le vecteur image qui lui est associé.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_\theta)} = \overline{\sigma_{T+F}} \cdot \vec{E}_\theta = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta) = \tau \cdot \vec{E}_x$$

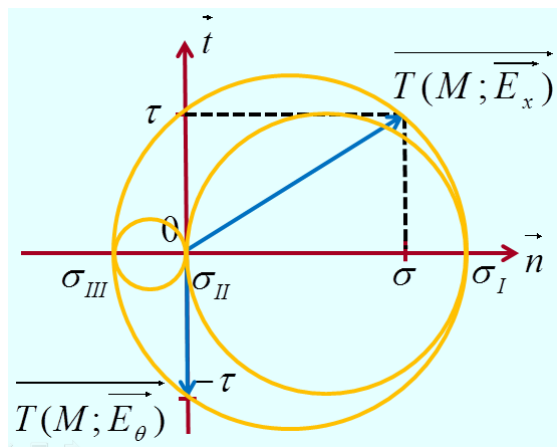
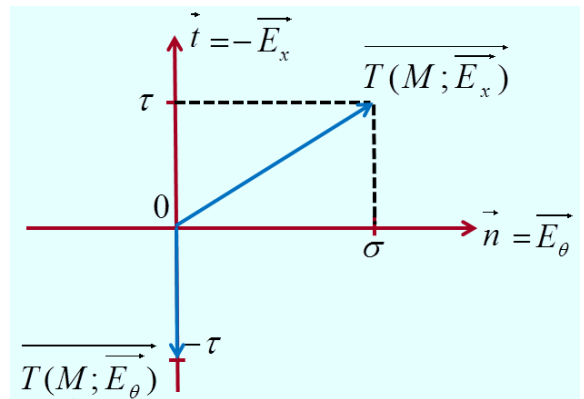
La composante normale est nulle.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_\theta)} \cdot \vec{E}_\theta = 0$$

Elle est logiquement portée par l'axe normal du plan de Mohr qui en l'occurrence est le vecteur orthoradial. En conséquence, le vecteur image est purement tangentiel, le vecteur tangent étant colinéaire au vecteur axial.

$$\overrightarrow{T(M; \vec{E}_\theta)} - 0\vec{E}_\theta = \vec{\tau}_n = \tau \vec{E}_x$$

Toutefois nous devons respecter l'orientation entre le vecteur axial et le vecteur orthoradial que nous avons pris pour le premier vecteur image. On peut donc représenter le vecteur image. Cela nous donne un deuxième point du cercle de Mohr.



On peut alors tracer le cercle sachant que son centre est situé à l'intersection de la médiatrice des deux points et de l'axe horizontal du plan de Mohr.

L'intersection du cercle avec cet axe horizontal nous donne deux valeurs propres de signes opposées. On sait que la troisième valeur propre, associée au vecteur propre confondu avec la direction radiale, est nulle.

Cela nous permet de représenter les deux autres cercles de Mohr.

12.

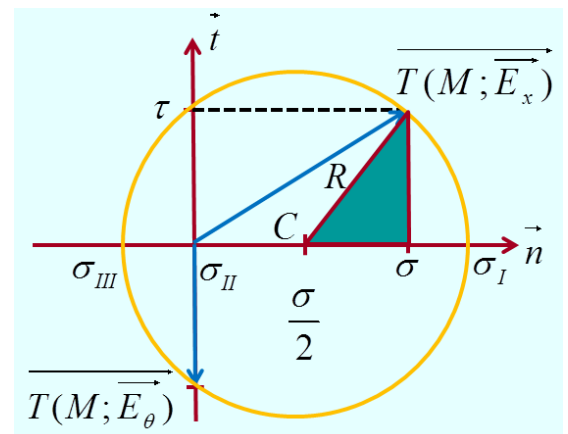
Pour le calcul des valeurs propres extrémales, il faut travailler à partir du plus grand des cercles.

Par construction, on connaît l'abscisse du centre. Le théorème de Pythagore nous permet de calculer facilement le rayon.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Et l'on peut en déduire les valeurs propres.

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \sigma_{III} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$



Et l'on connaît l'état de contrainte dans la base principale.

$$\underline{\underline{\sigma_{T+F}}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta) = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} (\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III})$$

La méthode utilisée pour arriver à ce résultat est graphique, mais bien entendu, il est possible d'utiliser une méthode analytique. Avec cette petite application, on peut remarquer que la contrainte tangentielle due à la torsion contribue à l'augmentation de la contrainte normale maximale, tout comme la contrainte normale de flexion augmente la contrainte tangentielle maximale.

$$(\sigma_n)_{MAX} = \sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (\tau_n)_{MAX} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

13.

Cette leçon nous aura permis de mieux comprendre la notion de contrainte. L'utilisation du principe de superposition va nous permettre de nous ramener à l'étude de cas simples qui pourront ensuite être combinés pour former un état plus complexe.

3-4 CONTRAINTES

Application

Théorie des poutres : état de contrainte

On considère une poutre droite de section droite constante.



Le domaine est donc un cylindre droit à base quelconque d'axe $(O; \vec{E}_1)$.

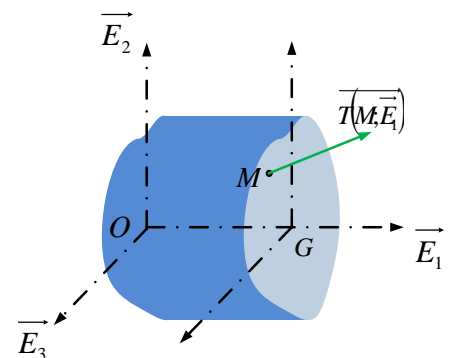
Les axes $(O; \vec{E}_2)$ et $(O; \vec{E}_3)$ sont les axes principaux quadratiques de la section droite du cylindre. L'axe $(O; \vec{E}_1)$ représente la ligne des barycentres des sections droites. Les dimensions transversales (dans le plan \vec{E}_1, \vec{E}_2) sont très faibles devant la dimension longitudinale. Le domaine n'est sollicité que par des chargements ponctuels appliqués sur la surface extérieure.

Avec ces hypothèses, on admet que le tenseur des contraintes en un point M quelconque de la poutre se présente sous la forme générique suivante :

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Cela nous permet de préciser la répartition du vecteur contrainte dans un plan de section droite.

$$\overline{T(M; \vec{E}_1)} = \overline{\overline{\sigma(M)}} \vec{E}_1 = \sigma_{11} \vec{E}_1 + \sigma_{12} \vec{E}_2 + \sigma_{13} \vec{E}_3$$



Ce vecteur représente la densité surfacique des efforts exercés au niveau du plan de coupe par la partie enlevée sur la partie restante. A cette distribution d'effort on peut associer un torseur d'effort appelé torseur des efforts intérieur et qui nous permettra de définir les composantes de la sollicitation.

$$\vec{R} = \int_S \overline{T(M; \vec{E}_1)} ds = N \vec{E}_1 + T_2 \vec{E}_2 + T_3 \vec{E}_3$$

$$\vec{M}_G = \int_S \overline{GM} \wedge \overline{T(M; \vec{E}_1)} ds = M_t \vec{E}_1 + M_{f_2} \vec{E}_2 + M_{f_3} \vec{E}_3$$

Cela nous donne alors des relations permettant d'établir la sollicitation sur la poutre en fonction du tenseur des contraintes

$$N = \int_S \sigma_{11} ds ; Mt = \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) ds$$

$$T_2 = \int_S \sigma_{12} ds ; Mf_2 = - \int_S x_3 \sigma_{11} ds$$

$$T_3 = \int_S \sigma_{13} ds ; Mf_3 = \int_S x_2 \sigma_{11} ds$$

Donc dans ce tenseur :

- σ_{11} est la contrainte normale. Elle est fonction de l'effort de traction – compression N et des deux composantes du moment de flexion Mf_2 et Mf_3 .
- σ_{12} est la composante de la contrainte tangentielle dans la direction du vecteur \vec{E}_2 . Elle est fonction de la composante de l'effort tranchant T_2 et du moment de torsion Mt .
- σ_{13} est la composante de la contrainte tangentielle dans la direction du vecteur \vec{E}_3 . Elle est fonction de la composante de l'effort tranchant T_3 et du moment de torsion Mt .

QUESTIONS

1- La poutre est sollicitée en traction simple. Donner le tenseur des contraintes en un point quelconque en admettant les résultats de la théorie des poutres. Vérifier ensuite les équations d'équilibre.

2- On considère cette fois une sollicitation de flexion pure (sans effort tranchant). Le moment de flexion est dirigé selon le vecteur \vec{E}_3 . Donner à nouveau le tenseur des contraintes et vérifier les équations d'équilibre.

3- On admet que dans le cas d'une sollicitation avec effort tranchant T_2 (flexion simple), la contrainte tangentielle est donnée par la formule :

$$\tau = \frac{T_2 A(x_2)}{I_{G3} b(x_2)} \begin{cases} T_2 & \text{Effort tranchant} \\ I_{G3} & \text{Moment quadratique} \\ A(x_2) & \text{Moment statique} \\ b(x_2) & \text{Largeur} \end{cases}$$

A quelle(s) condition(s) les équations d'équilibre seront-elles vérifiées dans le cas d'une flexion simple?

Peut-on vérifier les équations d'équilibre avec une poutre de section rectangulaire? Avec une poutre de section circulaire?

4- Les équations d'équilibre peuvent-elles être satisfaites dans le cas de la torsion d'une poutre de section droite circulaire?

Donner l'expression du tenseur des contraintes dans la base cylindrique.

5- Pouvons-nous, dans le cas de la flexion pure par exemple, proposer d'autres répartitions de contrainte que celle donnée par la théorie des poutres?

25.

Nous allons regarder une application sur l'état de contrainte à partir d'un exercice basé sur des résultats de la théorie des poutres.

26.

Voici l'énoncé de l'exercice. Les auditeurs sont invités à apporter des réponses de façon autonome puis à valider la solution en regardant les réponses. Le domaine d'étude est une poutre, c'est-à-dire un corps dont l'une des dimensions est très grande devant les deux autres.

Avec ces différentes hypothèses le tenseur des contraintes prend une forme simple. Toutefois cette forme ne permet pas de déduire des directions principales de contraintes. La valeur des composantes des contraintes est directement dépendante de la nature de la sollicitation exercée sur la poutre.

Au fil de l'exercice nous examinerons chaque sollicitation simple afin de valider, ou non, les formules données par la théorie des poutres. Nous profiterons de la sollicitation de torsion pour examiner les formes du tenseur des contraintes en fonction de la base d'étude. Enfin nous terminerons en regardant si d'autres distributions de contraintes peuvent être envisagées.

27.

Pour la sollicitation de traction, seule la contrainte normale est non nulle. D'après la théorie des poutres elle est égale au quotient de l'effort normal par l'aire de la section droite.

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S}$$

Donc le tenseur des contraintes dans la base d'étude n'a qu'une seule composante non nulle.

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} N/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\overrightarrow{E}_i)$$

Il reste à regarder si les équations d'équilibres peuvent être satisfaites.

$$\rho \vec{\gamma}(M, t / R_g) = \text{div} \overline{\overline{\sigma}} + \rho \vec{f}(M, t)$$

Le domaine est en équilibre ce qui implique que le terme d'accélération est nul. Comme le chargement n'est appliqué que sur la surface extérieure du domaine, le vecteur force de volume par unité de volume est nul aussi. Donc le tenseur des contraintes est un tenseur à divergence nulle.

$$\text{div} \overline{\overline{\sigma}} = \vec{0}$$

Avec la forme du tenseur contrainte en traction et compte tenu du fait que la seule contrainte non nulle est constante il est évident que la divergence du tenseur contrainte est nulle.

28.

Pour avoir de la flexion pure, il faut que le moment de flexion soit constant dans la direction de la poutre \overrightarrow{E}_1 . Dans le cas de la flexion pure nous n'avons à nouveau que la contrainte normale qui est non nulle. Par contre elle n'est plus constante dans une section droite et elle est une fonction linéaire de la distance du point d'étude à l'axe de flexion.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} \quad \sigma_{11} = \frac{Mf_3 x_2}{I_{G3}}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment le principe fondamental de la mécanique nous conduit à avoir une divergence du tenseur des contraintes nulles.

$$\vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} = \vec{0}$$

Le moment de flexion Mf_3 est indépendant de la variable de position axiale x_1 . Il en est de même pour le moment quadratique car la section droite de la poutre est constante. Donc la première composante du tenseur des contraintes est indépendante de x_1 et nos équations d'équilibre sont satisfaites.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0$$

29.

Dans le cas de la flexion simple, l'effort tranchant n'est pas nul et il est directement dépendant de la variation du moment de flexion le long de la poutre.

$$T_2 = - \frac{\partial Mf_3}{\partial x_1}$$

De fait nous avons des contraintes tangentielles σ_{12} portées par la direction \vec{E}_2 . Avant d'examiner la proposition de distribution de ces contraintes tangentielles, regardons ce que nous donne une hypothèse de distribution uniforme, c'est-à-dire indépendante des coordonnées (x_2, x_3) du point dans la section droite, à l'image de la distribution des contraintes normales dans le cas de la traction.

$$\sigma_{12} = \tau = \frac{T_2}{S}$$

Le tenseur des contraintes a donc deux composantes indépendantes non nulles.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, le principe fondamental de la mécanique nous conduit à un tenseur contrainte à divergence nulle ce qui nous amène à examiner deux équations scalaires, la troisième étant vérifiée.

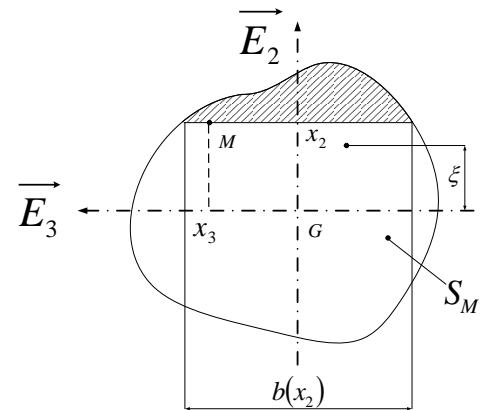
$$\vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} = \vec{0} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned}$$

Avec des contraintes tangentielles constantes, la deuxième équation ne pose aucun problème mais par contre on se rend compte que la première équation ne peut pas être satisfaite. Le principe fondamental de la mécanique n'étant pas réalisé, il faut revoir nos hypothèses.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{Mf_3 x_2}{I_{G3}} \right) = \frac{x_2}{I_{G3}} \frac{\partial Mf_3}{\partial x_1} = - \frac{x_2 T_2}{I_{G3}}$$

30.

Nous allons donc reprendre l'étude en utilisant l'hypothèse de distribution de contraintes tangentielles proposée dans l'énoncé. Dans la formule on retrouve des grandeurs déjà connues et le moment statique de la partie de la section droite à coordonnée inférieure au point d'étude par rapport à l'axe d'orientation \vec{E}_3 passant par l'iso barycentre. Ce qui correspond à la surface S_M c'est-à-dire à la zone non hachurée de la section.



$$A(x_2) = \int_{S_M} \xi ds$$

Cette fois la contrainte tangentielle est donnée par la formule de Bredt

$$\sigma_{12} = \frac{T_2 A(x_2)}{I_{G3} b(x_2)}$$

L'application du principe fondamental de la mécanique nous donne un résultat similaire au précédent

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0$$

Ceci nous donne alors deux conditions d'équilibre

$$-\frac{x_2 T_2}{I_{G3}} + \frac{T_2}{I_{G3}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A}{b} \right) = 0 \quad \frac{A}{I_{G3} b} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} = 0$$

La première condition nous impose une relation sur la géométrie de la section droite. La deuxième condition nous impose une relation sur le chargement. Cette dernière se traduit par le fait que l'effort tranchant doit être constant ce qui exclut par exemple des chargements en flexion de la poutre par une distribution linéique d'effort.

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A}{b} \right) = x_2 \frac{\partial T_2}{\partial x_1} = 0$$

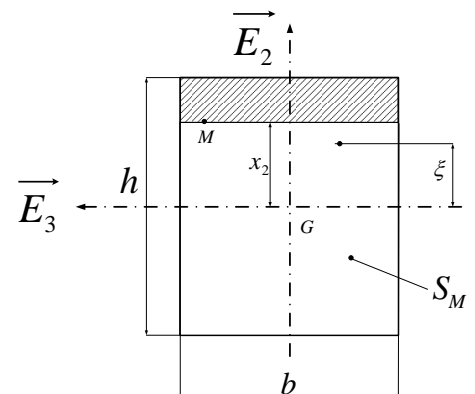
31.

Nous allons traiter le cas de la section rectangulaire de hauteur h et de largeur b afin de savoir si la condition géométrique est satisfaite. Il faut tout d'abord évaluer le moment statique

$$A(x_2) = \int_{S_M} \xi ds = \int_{-h/2}^{x_2} \xi b d\xi = \frac{b}{2} [\xi^2]_{-h/2}^{x_2} = \frac{b}{2} \left(x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

On peut alors constater que la condition d'équilibre est satisfaite.

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A}{b} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) = x_2$$



32.

Pour la section circulaire, le calcul est un peu plus complexe car la largeur b de la section est fonction de la variable de position x_2 . En utilisant le théorème de Pythagore, on peut obtenir cette fonction.

$$b(x_2) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x_2^2}$$

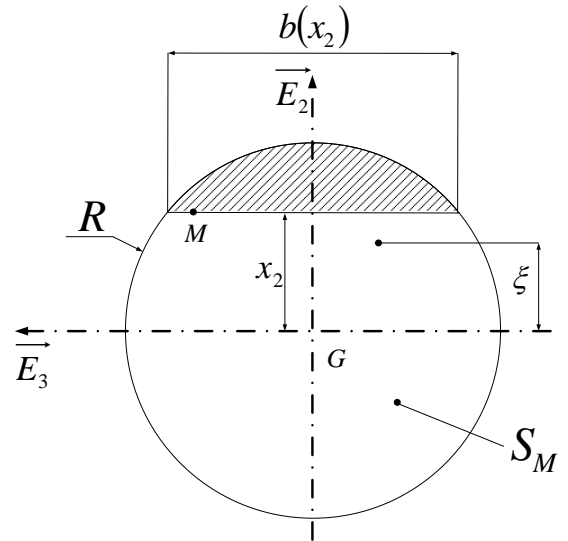
Cette dernière relation nous permet de faire le calcul du moment statique.

$$A(x_2) = \int_{S_M} \xi ds = \int_R^{x_2} \xi b(\xi) d\xi$$

$$A(x_2) = \frac{1}{2} \int_R^{x_2} \xi \sqrt{R^2 - \xi^2} d\xi$$

$$A(x_2) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (R^2 - \xi^2)^{3/2} \right]_R^{x_2}$$

$$A(x_2) = -\frac{1}{6} (R^2 - x_2^2)^{3/2}$$



Et on constate alors que la condition d'équilibre ne peut pas être satisfaite. En définitive, la relation de distribution des contraintes tangentielles de Bredt permet de satisfaire aux équations d'équilibre dans le cas d'une poutre droite à chargement de flexion non réparti linéairement dans le cas d'une section rectangulaire. Par contre dans bien d'autre cas les équations d'équilibre ne sont pas satisfaites. En pratique, la détermination des contraintes tangentielles dues à un effort tranchant est très délicate. Toutefois, comme la valeur maximale de contrainte tangentielle donnée par la formule de Bredt est assez proche de la valeur maximale réelle, on utilise souvent cette formule.

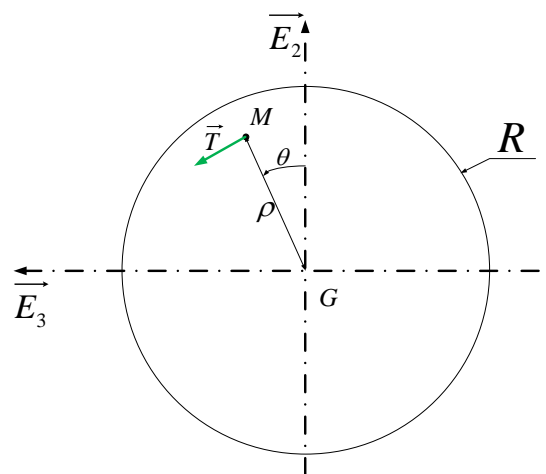
$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A}{b} \right) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (R^2 - x_2^2) = \frac{2}{3} x_2 \neq x_2$$

33.

Dans le cas d'une poutre droite de section circulaire la théorie de la torsion nous indique que la contrainte normale est nulle et qu'il n'y a donc qu'une contrainte tangentielle. De plus ce vecteur contrainte, contenu dans le plan de section droite, est ortho radial, c'est-à-dire orthogonal au rayon vecteur, et son module est proportionnel à la distance du point d'étude par rapport à l'axe de torsion.

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_1 \\ \overrightarrow{E}_2 \\ \overrightarrow{E}_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \tau \overrightarrow{E}_\theta = r \frac{Mt}{I_G} \overrightarrow{E}_\theta$$



A nouveau le principe fondamental de la mécanique nous conduit à un tenseur des contraintes qui doit avoir une divergence nulle, ce qui nous donne trois conséquences scalaires.

$$\vec{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0 \end{array} \right.$$

Pour exploiter ces dernières relations, il faut calculer les composantes des contraintes tangentielles dans la base d'étude cartésienne. Pour cela un simple changement du vecteur convient. Il ne faut pas oublier de faire aussi le changement de variables.

$$\vec{T} = \tau \vec{E}_\theta = \tau (-\sin \theta \vec{E}_2 + \cos \theta \vec{E}_3)$$

$$\sigma_{12} = -\tau \sin \theta = -\frac{Mt}{I_G} \rho \sin \theta = -\frac{Mt}{I_G} x_3$$

$$\sigma_{13} = \tau \cos \theta = \frac{Mt}{I_G} \rho \cos \theta = \frac{Mt}{I_G} x_2$$

Avec toutes ces relations, on constate que le principe fondamental de la mécanique sera satisfait si le moment de torsion est constant le long de la poutre. En cas contraire la distribution proposée par la théorie des poutres n'est pas convenable.

$$\frac{\partial Mt}{\partial x_1} = 0$$

34.

Compte tenu de la symétrie de révolution du domaine, il peut être logique de s'interroger sur les composantes dans une base cylindrique. Pour cela il faut commencer par définir le changement de base et le changement de coordonnées ou de variables.

$$\vec{OM} = x_i \vec{E}_i = \rho \vec{E}_r + z \vec{E}_z$$

$$\vec{E}_r = \cos \theta \vec{E}_2 + \sin \theta \vec{E}_3$$

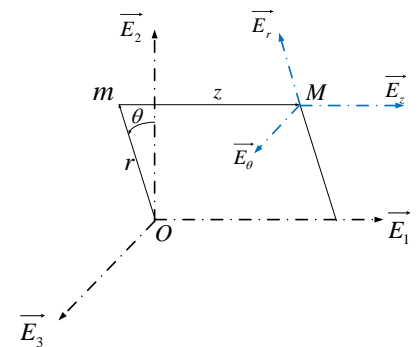
$$\vec{E}_\theta = -\sin \theta \vec{E}_2 + \cos \theta \vec{E}_3$$

$$\vec{E}_z = \vec{E}_1$$

$$x_1 = z$$

$$x_2 = r \cos \theta$$

$$x_3 = r \sin \theta$$



Le tenseur des contraintes est donné dans la base d'étude qui est cartésienne mais il admet aussi un représentant matriciel dans la base cylindrique.

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \frac{Mt}{I_G} \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

Pour obtenir les composantes du tenseur des contraintes dans la base cylindrique, on peut utiliser la relation de changement de base.

$$\overline{\overline{\sigma}}(M)_{r\theta z} = P^{-1} \overline{\overline{\sigma}}(M)_{123} P$$

Pour cela il faut définir correctement la matrice de passage.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir fait un double produit de matrice et utilisé les relations de changement de variables, on constate que le représentant matriciel de l'état de contrainte dans la base cylindrique est très simple.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

35.

Ce résultat aurait aussi pu être obtenu en remarquant que les colonnes du tenseur des contraintes représentent les vecteurs contraintes dans les directions associées aux vecteurs unitaires de la base d'étude.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z) \quad \begin{aligned} \overline{T(M; \vec{E}_r)} &= \sigma_{rr} \vec{E}_r + \sigma_{r\theta} \vec{E}_\theta + \sigma_{rz} \vec{E}_z \\ \overline{T(M; \vec{E}_\theta)} &= \sigma_{\theta r} \vec{E}_r + \sigma_{\theta\theta} \vec{E}_\theta + \sigma_{\theta z} \vec{E}_z \\ \overline{T(M; \vec{E}_z)} &= \sigma_{zr} \vec{E}_r + \sigma_{z\theta} \vec{E}_\theta + \sigma_{zz} \vec{E}_z \end{aligned}$$

Calculons par exemple le vecteur contrainte associé à la direction radiale. Comme nous connaissons le tenseur des contraintes dans la base cartésienne, nous faisons le calcul dans cette base.

$$\overline{T(M; \vec{E}_r)} = \overline{\overline{\sigma(M)}} \vec{E}_r = \frac{\tau}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{\tau}{\rho} \begin{pmatrix} -x_3 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Il faut maintenant transférer le vecteur dans la base cylindrique. Toutefois l'emploi des relations de changement de variables nous démontre que ce vecteur est nul.

$$\overline{T(M; \vec{E}_r)} = \frac{\tau}{\rho} (-x_3 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \vec{E}_1 = \vec{0}$$

Donc dans la base cylindrique, les composantes situées sur la première ligne du tenseur des contraintes sont nulles. Du fait de la symétrie, il en est de même pour les composantes situées sur la première colonne.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

On peut maintenant faire le calcul du vecteur contrainte associé à la direction orthoradiale.

$$\overline{T(M; \vec{E}_\theta)} = \overline{\overline{\sigma(M)}} \vec{E}_\theta = \frac{\tau}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{\tau}{\rho} \begin{pmatrix} x_3 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

A nouveau, en faisant le changement de base et de variables sur le vecteur obtenu, on a un résultat final très simple.

$$\overline{T(M; \vec{E}_\theta)} = \frac{\tau}{\rho} (x_3 \sin \theta + x_2 \cos \theta) \vec{E}_1 = \tau \vec{E}_1 = \tau \vec{E}_z$$

Cela nous donne encore de nouvelles composantes de notre tenseur contrainte dans la base cylindrique.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

En définitive, il ne reste plus qu'une composante à déterminer. On pourrait utiliser la méthode précédente et calculer le vecteur contrainte dans la direction axiale, mais il est plus simple d'utiliser le fait que la trace du tenseur est un invariant par changement de base. Comme cette trace est nulle dans la base cartésienne, on en déduit que la composante manquante est nulle. Ce qui nous donne le représentant de notre tenseur dans la base cylindrique.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

36.

Pour imaginer de nouvelles distributions de contraintes dans le cas de la flexion pure, il faut se référer au principe fondamental de la mécanique.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0$$

Donc la première composante du tenseur des contraintes dans la base d'étude doit être indépendante de la coordonnée axiale. Toutefois cela n'est pas suffisant car il faut respecter le lien avec les composantes du torseur des efforts intérieurs.

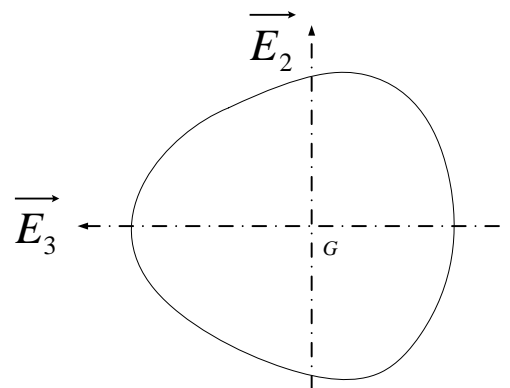
$$N = \int_S \sigma_{11} ds = 0 ; Mt = \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) ds = 0$$

$$T_2 = \int_S \sigma_{12} ds = 0 ; Mf_2 = - \int_S x_3 \sigma_{11} ds = 0$$

$$T_3 = \int_S \sigma_{13} ds = 0 ; Mf_3 = \int_S x_2 \sigma_{11} ds \neq 0$$

Ceci étant on peut néanmoins envisager des fonctions contraintes permettant d'obtenir le résultat souhaité. Ainsi il est aisé de constater que, dans le cas d'une section symétrique par rapport à l'axe de flexion, une distribution cubique de la contrainte normale satisfait aux différentes conditions énoncées. En fait nous verrons par la suite qu'il n'existe qu'une seule solution à un problème donné. Ceci est dû au fait qu'il existe un lien entre l'état de déformation et l'état de contrainte.

$$\sigma_{11} = k x_2^3$$



37.

Cet exercice nous a permis de constater quelques liens avec la théorie des poutres. On se rend compte qu'il n'est pas si évident d'avoir un état de contrainte satisfaisant au principe fondamental de la mécanique. Les formules proposées dans le cadre de la théorie des poutres ne donnent pas toujours satisfaction. Mais il faut prendre conscience que souvent ces formules donnent des résultats proches de la réalité et qu'elles sont suffisantes dans bien des applications.

4-1

COMPORTEMENT

Relations contraintes déformations

1.

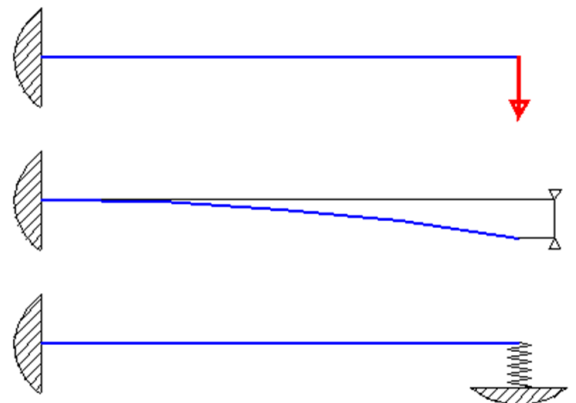
Nous venons de faire l'étude séparément des déformations induites par un déplacement et des contraintes induites par des efforts, mais il est évident qu'il y a interdépendance entre ces notions. En effet pour créer un déplacement, il faut imposer des efforts, tout comme des efforts peuvent être imposés par des conditions de déplacement par exemple au niveau d'appuis. Il est donc logique de s'intéresser maintenant à ces relations contraintes – déformations qui vont en fait traduire la loi de comportement du matériau utilisé.

2.

Dans l'étude des structures, on constate facilement que l'application d'efforts engendre des déformations et des déplacements. Parfois ces derniers sont très faibles, invisibles à l'œil nu, mais toujours mesurables. On parle de pilotage en force.

Mais l'on peut aussi imposer des déplacements sur notre structure. Bien entendu, pour obtenir un certain état déformé, il faudra appliquer des efforts en conséquence. On parle alors de pilotage en déplacement.

Et la réalité peut être un peu plus complexe. En effet la force appliquée à la structure peut être dépendante du déplacement.



3.

Nous allons montrer la nécessité d'un lien entre les aspects cinématiques et statiques en faisant un bilan mathématique des inconnues à déterminer et des équations à notre disposition.

En inconnue du problème, on peut tout d'abord penser à la masse du domaine étudié ce qui nous donne une fonction scalaire à déterminer. Ensuite, dans l'ordre de notre enseignement, nous avons rencontré le champ de déplacement, c'est-à-dire le vecteur déplacement en tout point de notre domaine. Comme c'est un champ vectoriel, il est déterminé par trois fonctions scalaires. Cela nous a permis d'introduire la notion du tenseur des déformations qui, comme il est symétrique, est caractérisé par six fonctions scalaires. Après cette étude cinématique, nous sommes passés à la vision dynamique ce qui nous a conduits au tenseur des contraintes qui est lui aussi symétrique et donc déterminé par six fonctions scalaires.

Inconnue	Nb de scalaire
Masse	1
Vecteur déplacement	3
Tenseur déformation	6
Tenseur contrainte	6
TOTAL	16

Ainsi, au total, nous nous retrouvons avec seize fonctions à déterminer en tout point du domaine.

4.

Examinons maintenant quelles sont les équations à notre disposition.

Pour traduire la conservation de la masse, nous avons l'équation de continuité. Dans l'étude cinématique, nous avons établi les relations entre le vecteur déplacement et le tenseur des déformations. Enfin dans l'étude dynamique, le principe fondamental de la mécanique nous donne trois relations scalaires grâce à l'équation de résultante. L'équation de moment est déjà prise en compte en spécifiant que le tenseur des contraintes est symétrique.

Equation	Nb de relation scalaire
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0$	1
$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}(\vec{u})}} + \overline{\overline{\text{grad}(\vec{u})}}^T \right)$	6
$\rho \vec{\gamma} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \text{div}(\overline{\overline{\sigma}}) + \rho \vec{f}$	3
TOTAL	10

On constate donc qu'en l'état nous n'avons pas assez d'équations pour trouver toutes nos inconnues. Toutefois, la solution existe, aussi il convient de combler ce déficit. Ce sera fait par l'intermédiaire des équations issues de la loi de comportement du matériau.

5.

Ces relations ne peuvent être indépendantes des lois de la physique, en particulier de la thermodynamique. Comme cette dernière permet entre autre d'établir des liens entre différentes formes énergétiques, nous allons donner une expression locale du théorème de l'énergie cinétique.

La démonstration part de l'expression locale du principe fondamental de la mécanique.

$$\rho \vec{\gamma} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \text{div}(\overline{\overline{\sigma}}) + \rho \vec{f}$$

Le produit scalaire avec le vecteur vitesse nous donne des termes homogènes à une puissance.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = \text{div}(\overline{\overline{\sigma}}) \cdot \vec{V} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$$

Le premier terme apparaît aussi dans une formule de divergence.

$$\text{div}(\overline{\overline{\sigma}} \vec{V}) = \text{div}(\overline{\overline{\sigma}}) \cdot \vec{V} + \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\text{grad}(\vec{V})}} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} V_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij}) V_j + \sigma_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

Avec la symétrie du tenseur des contraintes, on peut faire apparaître le produit doublement contracté entre le tenseur contrainte et le tenseur taux de déformation.

$$\sigma_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} D_{ij} = \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}}$$

On obtient ainsi une expression locale traduisant le théorème de l'énergie cinétique.

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = \text{div}(\overline{\overline{\sigma}} \vec{V}) - \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$$

Que l'on peut ensuite globaliser par intégration sur l'ensemble du domaine d'étude.

$$\int_D \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv = \int_D \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma \vec{V}}}) dv + \int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv - \int_D \overline{\overline{\sigma \otimes \mathbf{D}}} dv$$

6.

L'utilisation de la dérivée particulière d'une intégrale, de l'équation de continuité et du théorème de la divergence nous permet d'obtenir une nouvelle écriture.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv = \int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma \vec{n}}}) \vec{V} ds + \int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv - \int_D \overline{\overline{\sigma \otimes \mathbf{D}}} dv$$

Analysons les différents termes de cette dernière formulation. Dans le premier membre de l'égalité on trouve la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne de notre domaine.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv = \frac{dK}{dt}$$

Le premier terme du second membre représente la puissance des efforts extérieurs exercés sur la surface du domaine, c'est-à-dire les efforts de contact.

$$\int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma \vec{n}}}) \vec{V} ds$$

Le second terme est la puissance des efforts extérieurs exercés dans le volume du domaine, c'est-à-dire les efforts à distance.

$$\int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv$$

Enfin le dernier terme, qui vient en déduction des précédents, est associé au tenseur taux de déformation. C'est la puissance des efforts intérieurs appelée encore puissance de déformation.

$$- \int_D \overline{\overline{\sigma \otimes \mathbf{D}}} dv$$

On obtient ainsi l'énoncé du Théorème de l'énergie cinétique : la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un domaine D que l'on suit dans son mouvement est égale à la somme de la puissance mécanique des efforts extérieurs et de la puissance mécanique des efforts intérieurs.

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma \vec{V}}}) - \overline{\overline{\sigma \otimes \mathbf{D}}} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$$

soit en forme globale

$$\int_D \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv = \int_D \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma \vec{V}}}) dv + \int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv - \int_D \overline{\overline{\sigma \otimes \mathbf{D}}} dv$$

7.

Dans certains cas, nous rencontrerons des problèmes de couplage entre des phénomènes mécaniques et des phénomènes thermiques, aussi il est important pour nous de regarder de plus près ce que nous apporte la thermodynamique.

Regardons tout d'abord le premier principe qui permet d'établir une équivalence entre l'énergie mécanique et l'énergie thermique. La variation de l'énergie totale, énergie interne et énergie cinétique, d'un domaine est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs développés sur le système et de la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps.

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} = P_{ext} + \dot{Q} = \frac{\delta W_{ext}}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta t}$$

L'énergie interne est une grandeur extensive et on peut la définir à partir d'une énergie interne massique.

$$E = \int_D \rho e dv$$

Nous avons vu qu'il en était de même avec l'énergie cinétique. Dans ces deux cas nous avons affaire à des fonctions d'état, c'est-à-dire des fonctions qui ne dépendent que de la configuration dans laquelle se trouve notre domaine.

$$K = \int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv$$

Dans l'autre membre nous trouvons la puissance des forces extérieures au domaine.

$$\frac{\delta W_{ext}}{\delta t}$$

Elle est complétée par la variation de la quantité de chaleur que le domaine échange avec l'extérieur.

$$\frac{\delta Q}{\delta t}$$

Ces deux dernières quantités ne sont pas des fonctions d'état et leur valeur est par exemple dépendante du chemin d'évolution suivi par notre domaine.

8.

L'équation de conservation de l'énergie fait alors clairement apparaître des termes surfaciques et des termes volumiques.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \left(e + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv = \int_{\partial D} \overline{T(M; \vec{n})} \cdot \vec{V} ds + \int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} ds + \int_D r dv$$

Il est alors possible de prendre en compte le théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv = \int_{\partial D} \overline{T(M; \vec{n})} \cdot \vec{V} ds + \int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv - \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma}}} \otimes \mathbf{D} dv$$

Ce qui nous donne une forme globale du premier principe de la thermodynamique.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho e dv = \int_D \left(\overline{\overline{\overline{\sigma}}} \otimes \mathbf{D} + r \right) dv - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} ds$$

En utilisant l'équation de continuité et en appliquant les théorèmes de la divergence et de l'intégrale nulle, on peut donner une expression locale de ce bilan.

$$\rho \frac{de}{dt} = \overline{\overline{\overline{\sigma}}} \otimes \mathbf{D} + r - \text{div}(\vec{q})$$

On peut donc dire que la variation de l'énergie interne massique est due à la puissance massique dissipée par les efforts intérieurs et à un apport de chaleur.

9.

Le second principe de la thermodynamique ne traduit pas une loi de conservation, mais une dégradation irréversible d'une fonction d'état appelée entropie. Cette dernière ne peut qu'augmenter au cours du temps. Elle peut prendre une forme extensive liée à une distribution volumique.

Nous avons aussi la possibilité de donner une expression globale et une expression locale.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \rho \, dv \geq \int_D \frac{r}{T} \, dv - \int_{\partial D} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} \, ds \quad \rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0$$

D'autre part, nous avons une égalité fondamentale.

$$\text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \text{div}(\vec{q}) - \frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad} T} \cdot \vec{q}$$

Avec cette relation et le premier principe de la thermodynamique, on arrive à l'inégalité de Clausius Duhamel.

$$\overline{\overline{\sigma}} \otimes \mathbf{D} + \rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad} T} \geq 0$$

10.

Il est possible d'introduire l'énergie libre massique.

$$\psi = e - Ts$$

On obtient alors une inégalité qui fait apparaître les causes d'irréversibilités d'une transformation.

$$\overline{\overline{\sigma}} \otimes \mathbf{D} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad} T} \geq 0$$

Les deux premiers termes traduisent la contribution mécanique avec l'énergie de déformation diminuée de sa partie réversible.

$$\overline{\overline{\sigma}} \otimes \mathbf{D} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right)$$

Le dernier terme implique la contribution thermique.

$$-\frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad} T}$$

Le second principe de la thermodynamique permet d'affirmer qu'en l'absence de tout apport mécanique, l'échange thermique entre deux domaines ne peut se faire que dans le sens du corps chaud vers le corps froid.

$$\overline{\overline{\sigma}} \otimes \mathbf{D} + \rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad} T} \geq 0$$

11.

Nous avons donc constaté qu'il existe un déficit du nombre d'équations vis-à-vis du nombre d'inconnues à trouver ce qui conduirait à une indétermination des solutions. Mais la réalité est toute autre et la solution apparaît souvent comme unique. Il existe donc des relations complémentaires qui permettent de lever l'ambiguïté. Ces relations constituent la loi de comportement qui dépend essentiellement du matériau. La formulation d'une loi de comportement est fonction des hypothèses émises pour son obtention, lesquelles hypothèses doivent bien entendu être en accord avec les résultats expérimentaux. Examinons le cas précis du comportement le plus simple, à savoir l'élasticité linéaire.

La notion d'élasticité peut être traduite par le fait que la réponse du matériau est décrite sans ambiguïté par la connaissance de la température et du tenseur des déformations, ce qui a une incidence sur l'énergie libre massique.

$$\frac{d\psi(\underline{\varepsilon}, T)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} \otimes \frac{d\underline{\varepsilon}}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} \otimes \underline{\mathbf{D}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt}$$

En reportant dans l'inégalité de Clausius - Duhem, on obtient une nouvelle inégalité.

$$\left(\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} \right) \otimes \underline{\mathbf{D}} - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \frac{dT}{dt} - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \geq 0$$

Comme cette inégalité doit être satisfaite quelques soient la température et le tenseur des déformations, on obtient deux relations. La première relation montre que l'énergie libre massique est le lien entre l'état de déformation et l'état de contrainte. On lui donne le nom de potentiel élastique.

$$\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = 0 \qquad s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0$$

Si on ajoute l'hypothèse des petites perturbations, en faisant un développement limité au premier ordre, on obtient l'expression de la loi de comportement de thermoélasticité linéaire. Les trois termes de cette expression peuvent être analysés de façon indépendante.

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^0 + A \otimes \underline{\varepsilon} - \beta (T - T^0)$$

Le premier terme représente l'état de contraintes en l'absence de sollicitation mécanique ou thermique. On le désigne sous le vocable de contraintes résiduelles.

$$\underline{\sigma}^0$$

Le second fait apparaître un tenseur du quatrième ordre, dit tenseur d'élasticité, doublement contracté avec le tenseur des déformations. C'est la contribution mécanique à l'état de contrainte.

$$A \otimes \underline{\varepsilon}$$

Enfin le dernier terme est la contribution thermique. Elle est fonction de l'écart de température avec la configuration initiale et d'un tenseur du second ordre représentant les coefficients de dilatation thermique.

$$-\beta (T - T^0)$$

Si l'on poursuit dans les hypothèses simplificatrices, on peut considérer que le matériau est homogène et surtout isotrope. Cette dernière propriété implique que le comportement est identique dans toutes les directions de l'espace. Pour cela le tenseur des coefficients de dilatation thermique est sphérique, caractérisé par une seule fonction, alors que le tenseur d'élasticité est déterminé par deux constantes.

On obtient alors une expression simplifiée de notre loi de comportement, expression qui constitue la loi de Lamé.

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma^0}} + 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \left(\lambda \text{trace}(\overline{\overline{\varepsilon}}) - \beta(T - T^0) \right) \overline{\overline{I}}$$

A partir de là, il est possible d'obtenir la formulation inverse qui permet de calculer l'état de déformation dès lors que l'on connaît l'état de contrainte. C'est la loi de Hooke.

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \left(\overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma^0}} \right) + \left[\alpha(T - T^0) - \frac{\nu}{E} \text{trace} \left(\overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma^0}} \right) \right] \overline{\overline{I}}$$

Ces deux nouvelles relations font apparaître quatre constantes, mais en fait il n'y en a que deux qui soient effectivement indépendantes. On a par exemple des relations directes entre les coefficients de Lamé d'une part, le module d'Young et le coefficient de Poisson d'autre part.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Il en est de même pour la contribution thermique.

$$\alpha = \frac{\beta}{3\lambda+2\mu}$$

12.

Comme nous venons de le voir une loi de comportement ne peut pas être n'importe quelle relation entre un état de contrainte et un état de déformation. Il est impératif de respecter des conditions comme par exemple celles issues de la thermodynamique.

4-2

COMPORTEMENT

Anisotropie

1.

Pour être exploitable, la loi de comportement en élasticité linéaire fait appel à de nombreuses hypothèses. Dans sa version la plus simplifiée, nous formulons l'idée que le matériau est isotrope. On se propose maintenant de regarder plus avant l'intérêt de cette hypothèse en reprenant l'établissement de la loi d'élasticité linéaire et en examinant l'incidence de chaque hypothèse utilisée.

2.

Nous avons affaire à un milieu continu en transformation géométrique continue et infinitésimale. L'état de déformation est caractérisé par le tenseur des déformations en petites perturbations.

Nous supposons que la transformation est monotherme réversible. La réversibilité implique que le second principe devient une égalité.

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \dot{Q} = T dS$$

En indiquant que le domaine ne subit aucune transformation chimique et aucun changement d'état, nous pouvons en déduire qu'il n'y a pas de chaleur produite en interne. Le domaine étant constamment à la température de son environnement, l'échange de chaleur est nul.

$$\dot{Q} = 0$$

De fait l'équation traduisant le premier principe de la thermodynamique n'a plus qu'un terme dans le second membre. Ce qui nous montre que la puissance de déformation est la dérivée par rapport au temps de l'énergie potentielle.

$$\frac{dE}{dt} = -P_{int} = \int_D \overline{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{D}} dv$$

Cela nous permet de définir l'énergie de déformation qui est l'opposé du travail développé par les efforts intérieurs. Avec le premier principe de la thermodynamique, on peut maintenant affirmer que cette énergie de déformation est une fonction d'état. Cette énergie de déformation ne dépend donc que de l'état initial et de l'état final, ce qui implique nous avons affaire à une différentielle totale exacte. Le matériau restituant intégralement l'énergie fournit pour le déformer, le comportement est réversible, c'est-à-dire élastique.

$$dW_{def} = -P_{int} dt = \int_D \overline{\sigma} \otimes (\overline{\mathbf{D}} dt) dv = \int_D \overline{\sigma} \otimes d\overline{\varepsilon} dv = \int_D \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv$$

Pour que cette énergie de déformation soit une différentielle totale exacte, il faut que les composantes du tenseur des contraintes ne soient fonctions que du tenseur des déformations. Elles prennent une forme définie à une constante près, laquelle constante représente l'état de contrainte en l'absence de déformation. Ce sont les contraintes initiales ou contraintes résiduelles.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + f_{ij}(\varepsilon_{kl})$$

Pour continuer, nous supposons que l'état initial sans déformation est naturel ce qui implique que les contraintes résiduelles sont nulles. D'autre part nous supposons que le matériau a un comportement élastique linéaire, ce qui implique que l'état de contrainte est relié à l'état de déformation par un tenseur linéaire du quatrième ordre appelé le tenseur de raideur.

$$\sigma = A \otimes \varepsilon \qquad \sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations, ce tenseur de raideur est caractérisé par 36 termes. Toutefois nous avons quinze relations entre ses composantes, relations traduisant les conditions d'intégrabilité de Cauchy pour la différentielle totale exacte représentant l'énergie de déformation. On se retrouve donc avec 21 fonctions à déterminer. En règle générale, ces fonctions dépendent de la température et du temps, mais en limitant les plages de ces deux paramètres, on fait l'hypothèse que ce sont des constantes. Ces coefficients élastiques sont déterminés par des essais de comportement tels que l'essai de traction.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \Leftrightarrow \quad A_{ijkl} = A_{klij}$$

3.

Pour réduire le nombre de coefficients, on peut s'intéresser à l'hypothèse d'anisotropie, mais afin de comprendre les effets de cette hypothèse, nous allons procéder à un changement d'écriture car le tenseur d'élasticité est un tenseur d'ordre 4 difficile à représenter. Pour cela nous allons utiliser une application linéaire de notre espace vectoriel à trois dimensions dans lequel le tenseur d'ordre deux est représenté par une matrice vers un espace vectoriel à six dimensions dans lequel le tenseur symétrique est représenté par un vecteur. Voici la règle de transformation du tenseur des contraintes.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix}$$

Pour la transformation linéaire appliquée au tenseur des déformations, on utilise une transformation légèrement différente, ce qui nous sera ultérieurement utile pour expliciter l'énergie de déformation.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \end{pmatrix}$$

Cela permet alors de transformer le tenseur d'élasticité du quatrième ordre et de le représenter par une matrice carrée de dimension 6. Elle est donc caractérisée par 36 termes.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Les conditions d'intégrabilité de Cauchy nous apportent 15 relations entre ces différents coefficients.

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_{21} & c_{14} &= 2c_{41} & c_{24} &= 2c_{42} & c_{34} &= 2c_{43} & c_{45} &= c_{54} \\ c_{13} &= c_{31} & c_{15} &= 2c_{51} & c_{25} &= 2c_{52} & c_{35} &= 2c_{53} & c_{46} &= c_{64} \\ c_{23} &= c_{32} & c_{16} &= 2c_{61} & c_{26} &= 2c_{62} & c_{36} &= 2c_{63} & c_{56} &= c_{65} \end{aligned}$$

Nous nous retrouvons avec 21 coefficients indépendants. Compte tenu des relations d'intégrabilité, la structure de la matrice représentant le comportement est constituée de deux matrices carrées de dimension trois symétriques et d'une autre matrice retrouvé en double.

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} X_{ij} & \vdots & 2Z_{ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{ij} & \vdots & Y_{ij} \end{pmatrix}$$

4.

Les conditions d'anisotropie sont liées à des changements d'orientation dans la matière. Pour mettre en évidence les relations traduisant par exemples des symétries, nous allons utiliser les changements de base. Ceux-ci sont donnés par des formules classiques pour les vecteurs de base.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \leftrightarrow (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) \quad \vec{e}_i = a_i^j \vec{E}_j \quad \vec{E}_i = b_i^j \vec{e}_j \quad \text{avec } a_i^j b_j^k = \delta_i^k$$

On peut alors en déduire les relations de changement de base pour un tenseur du second ordre.

$$T = t^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T^{IJ} \vec{E}_I \otimes \vec{E}_J \quad t^{ij} = b_i^I b_j^J T^{IJ} \quad T^{IJ} = a_i^I a_j^J t^{ij}$$

Et on obtient des formules similaires, mais un peu plus complexes, pour un tenseur du quatrième ordre.

$$T = t^{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l = T^{IJKL} \vec{E}_I \otimes \vec{E}_J \otimes \vec{E}_K \otimes \vec{E}_L$$

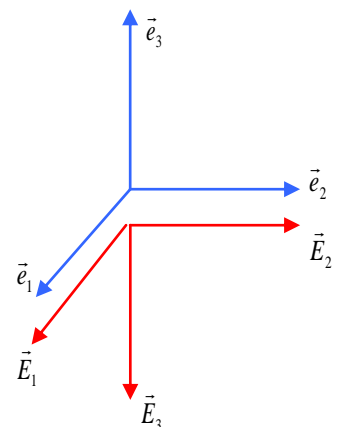
$$t^{ijkl} = b_i^I b_j^J b_k^K b_l^L T^{IJKL} \quad T^{IJKL} = a_i^I a_j^J a_k^K a_l^L t^{ijkl}$$

5.

Regardons ce qui se passe au niveau de l'application de ces formules tout d'abord dans le cas d'une simple symétrie plane.

Dans ce cas la loi de comportement doit être invariante par le changement de base défini par les matrices de rotation.

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = a$$



L'application des formules de changements de base nous donne alors des relations au niveau des coefficients du tenseur d'élasticité.

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{64} = 0$$

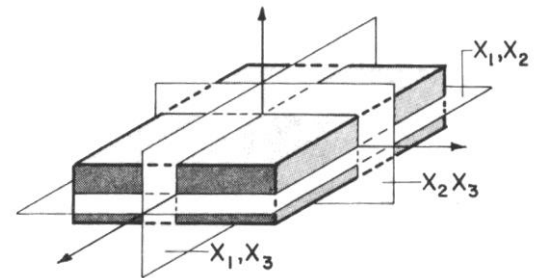
$$c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{65} = 0$$

Ce qui nous donne alors une nouvelle formulation des relations contraintes déformations.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

6.

Un milieu est dit **orthotrope** pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux, ce qui implique automatiquement la symétrie par rapport au troisième plan.



Avec le résultat précédent, la matrice représentant le tenseur d'élasticité prend une forme très simple dans le repère d'orthotropie.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Dans le cas où le repère d'orthotropie est celui des vecteurs propres de l'état de déformation, le résultat du calcul nous montre que nous obtenons aussi les composantes du tenseur des contraintes dans la base principale. Les deux bases principales de déformation et de contrainte sont alors confondues avec la base d'orthotropie.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_I \\ \varepsilon_{II} \\ \varepsilon_{III} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice traduisant le tenseur d'élasticité est caractérisée par 9 coefficients indépendants. Trois modules d'élasticité longitudinal E_1, E_2 et E_3 dans les directions de l'orthotropie, trois modules de cisaillement G_{12}, G_{23} et G_{31} et trois coefficients de contraction ν_{12}, ν_{23} et ν_{31} .

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

En effet la symétrie de la première sous matrice de dimension trois nous donne trois relations.

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

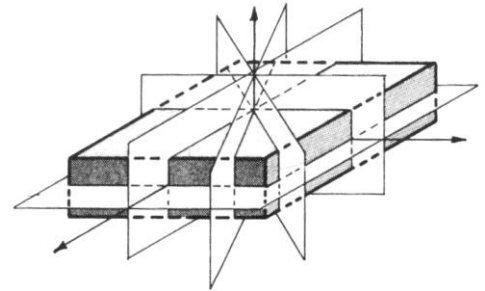
Enfin il convient de noter qu'il existe des considérations thermodynamiques sur le travail de déformation et qui nous donnent des inégalités.

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0; 1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0; 1 - \nu_{31}\nu_{13} > 0$$

$$1 - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{13}\nu_{32} - \nu_{21}\nu_{12}\nu_{31} - \nu_{31}\nu_{31}\nu_{23} > 0$$

7.

Un milieu est dit **isotrope transverse** pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par rotation autour d'un axe privilégié. Dans ce cas, tout plan passant par l'axe privilégié est un plan de symétrie. Nous pouvons donc remarquer que le milieu est déjà orthotrope.



Dans le cas d'une isotropie transverse portée par le troisième axe de la base, il est nécessaire d'avoir une invariance de la loi de comportement pour toute rotation définie par cette relation.

$$(P) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toutefois par rapport au cas orthotrope, nous aurons des relations supplémentaires entre les coefficients du tenseur d'élasticité comme par exemple celles qui vous sont proposées.

$$K_{1212} = -\sin\alpha \cos\alpha A_{1p} A_{2q} K_{11pq} + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) A_{1p} A_{2q} K_{12pq} + \sin\alpha \cos\alpha A_{1p} A_{2q} K_{22pq}$$

$$K_{1212} = -\sin\alpha \cos\alpha (-\sin\alpha \cos\alpha K_{1111} + \sin\alpha \cos\alpha K_{1122}) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 K_{1212} + \sin\alpha \cos\alpha (-\sin\alpha \cos\alpha K_{2211} + \sin\alpha \cos\alpha K_{2222})$$

En définitive nous aurons quatre nouvelles équations.

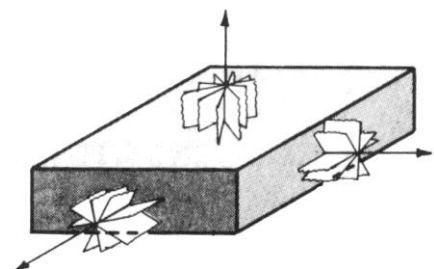
$$E_1 = E_2; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2}; G_{13} = G_{23}; 2G_{12} = \frac{E_1}{1 + \nu_{12}}$$

On obtient alors dans la base d'isotropie transverse une formulation matricielle simplifiée. Bien entendu, si la base d'isotropie transverse est la base principale de l'état de déformation, elle est aussi la base principale de l'état de contrainte.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

8.

Si la règle d'isotropie transverse est vraie pour trois axes orthogonaux, le milieu est dit isotrope. On a alors un ensemble de relations complémentaires.



$$E_2 = E_3; \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{31}}{E_3}; G_{12} = G_{31}; 2G_{23} = \frac{E_2}{1 + \nu_{23}} \quad \text{si } \vec{e}_1 \text{ est axe d'isotropie}$$

$$E_1 = E_3; \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_3}; G_{12} = G_{23}; 2G_{31} = \frac{E_3}{1 + \nu_{31}} \quad \text{si } \vec{e}_2 \text{ est axe d'isotropie}$$

$$E_1 = E_2; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2}; G_{13} = G_{23}; 2G_{12} = \frac{E_1}{1 + \nu_{12}} \quad \text{si } \vec{e}_3 \text{ est axe d'isotropie}$$

L'hypothèse d'**isotropie** impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base. Compte tenu de toutes ces relations, la loi de comportement se présente sous une forme simple.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

On peut en déduire la loi de comportement faisant apparaître les coefficients de Lamé. Les directions principales de contrainte sont aussi les directions principales de déformation. C'est avec cette loi de comportement que nous allons poursuivre dans des applications.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

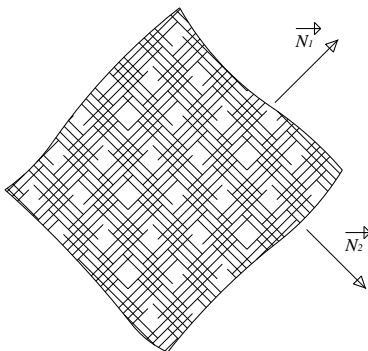
9.

Au vu de ce cours, nous constatons que les formules traduisant une loi d'élasticité linéaire sont simplifiées si le matériau est isotrope. Toutefois, il faut bien réaliser que l'essentiel des calculs étant fait avec des moyens informatiques, le traitement d'une loi linéaire anisotrope ne posera pas beaucoup de problème.

4-3 COMPORTEMENT

Application

Réalisation d'un tube en matériau composite



On se propose de réaliser des tubes en matériau composite de type "fibre de verre longues/résine époxy".

Le tissu fibre de verre est constitué de plusieurs nappes superposées. Chaque nappe est réalisée par des fils identiques tous alignés dans la même direction.

Les nappes superposées sont orientées alternativement dans deux directions perpendiculaires \vec{N}_1 (fils **A**) et \vec{N}_2 (fils **B**). Pour assurer la cohésion, l'ensemble des nappes est noyé dans une résine époxy **R**.

On veut déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau équivalent **E**.

On rappelle que pour un matériau quelconque à comportement élastique linéaire on a :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\sigma} = \hat{C} \hat{\varepsilon}$$

1-1 La résine a un comportement isotrope. Ce dernier est défini par le module d'élasticité longitudinal E_R et le coefficient de Poisson ν_R .

Exprimer le tenseur de raideur de la résine en fonction des constantes élastiques. On précisera la base utilisée.

1-2 Chaque fibre de verre est caractérisée par sa rigidité k . Pour la déterminer, on soumet un fil d'orientation \vec{N} à une contrainte σ_{NN} . On mesure la dilatation linéaire ε_{NN} et on en déduit $k = \sigma_{NN} / \varepsilon_{NN}$.

On désigne par n le nombre de fils par unité de largeur dans chaque nappe et par $2r$ le nombre total de nappes par unité d'épaisseur (r nappes de fils **A** et r nappes de fils **B**).

On considère que la fibre n'offre aucune résistance aux cisaillements et aux déplacements non parallèles à son sens longitudinal. On en déduit que le comportement des fils **A** est caractérisé par :

$$\sigma_{ijA} = 0 \quad \text{sauf} \quad \sigma_{11A} = K \varepsilon_{11A} \quad \text{dans la base } (\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3).$$

Donner la valeur de K en fonction de k , n et r . Que peut-on dire pour caractériser le comportement des fils **B**?

1-3 On se place dans l'hypothèse des petits déplacements. Ceci nous amènera à considérer que les déplacements sont les mêmes pour la matrice, pour les fils et pour le matériau homogène équivalent. Le calcul de la matrice de raideur du matériau équivalent sera fait suivant le principe d'égalité des énergies de déformation :

$$U_{\text{déf mat équi}} = U_{\text{déf rés}} + U_{\text{déf filsA}} + U_{\text{déf filsB}} \Leftrightarrow U_E = U_R + U_A + U_B$$

On rappelle que la densité d'énergie de déformation, qui est un invariant, se calcule suivant la formule :

$$\frac{dU}{dv} = \frac{1}{2} \tau \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}$$

On désigne par $\eta_A = V_A/V_T$ (resp. $\eta_B = V_B/V_T$) la densité volumique de fibres A (resp. fibres B).

A partir du résultat précédent, donner l'expression de la matrice de raideur du matériau équivalent dans la base $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$.

1-4 En fait l'enroulement des fibres est réalisé autour d'un cylindre de telle sorte que l'on ait :

$$\vec{N}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{N}_\theta - \vec{N}_z) \quad \vec{N}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{N}_\theta + \vec{N}_z) \quad \vec{N}_3 = \vec{N}_r$$

Donner alors l'expression de la matrice de raideur du matériau équivalent dans la base cylindrique $(\vec{N}_r, \vec{N}_\theta, \vec{N}_z)$.

1.

Nous allons regarder une application sur les lois de comportement en s'intéressant à la constitution d'un matériau composite réalisé à partir de fibres de verre et de résine époxy.

2.

Voici l'énoncé de l'exercice. Les auditeurs sont invités à apporter des réponses de façon autonome puis à valider la solution en regardant les réponses proposées. On veut réaliser un matériau composite en associant de longues fibres de verres à une résine époxy. Il faut définir la loi de comportement du matériau obtenu.

Pour cela on va utiliser une équivalence à base d'énergie de déformation. Au fin al on va obtenir le tenseur de raideur dans la base de constitution du matériau ce qui nous permettra de définir les composantes dans une base cylindrique.

3.

La résine seule est un matériau isotrope dont le comportement peut être caractérisé par la loi de Lamé.

$$\overline{\overline{\sigma}}_R = 2 \mu_R \overline{\overline{\varepsilon}}_R + \lambda_R \text{trace}(\overline{\overline{\varepsilon}}_R) \overline{\overline{I}}$$

Pour ce genre de comportement, deux constantes élastiques peuvent suffire à la caractérisation et on peut retenir le module d'Young et le coefficient de Poisson.

$$\mu_R = \frac{E_R}{2(1+\nu_R)} \quad \lambda_R = \frac{\nu_R E_R}{(1+\nu_R)(1-2\nu_R)}$$

Ce qui nous donne une première relation tensorielle pour caractériser le comportement de notre résine.

$$\overline{\overline{\sigma}}_R = \frac{E_R}{1+\nu_R} \overline{\overline{\varepsilon}}_R + \frac{\nu_R E_R}{(1+\nu_R)(1-2\nu_R)} \text{trace}(\overline{\overline{\varepsilon}}_R) \overline{\overline{I}}$$

Pour avoir une relation matricielle faisant intervenir le tenseur de raideur, il faut faire un changement d'espace vectoriel. Il est à noter que le comportement de la résine étant celui d'un matériau isotrope, la relation matricielle obtenue est valable dans toutes bases orthonormées. Il faut aussi faire attention au fait que les termes hors diagonale du tenseur des déformations représentent les demi distorsions angulaires.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11R} \\ \sigma_{22R} \\ \sigma_{33R} \\ \sigma_{23R} \\ \sigma_{31R} \\ \sigma_{12R} \end{pmatrix} = \frac{E_R}{1+\nu_R} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu_R}{1-2\nu_R} & \frac{\nu_R}{1-2\nu_R} & \frac{\nu_R}{1-2\nu_R} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_R}{1-2\nu_R} & \frac{1-\nu_R}{1-2\nu_R} & \frac{\nu_R}{1-2\nu_R} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_R}{1-2\nu_R} & \frac{\nu_R}{1-2\nu_R} & \frac{1-\nu_R}{1-2\nu_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11R} \\ \varepsilon_{22R} \\ \varepsilon_{33R} \\ \gamma_{23R} \\ \gamma_{31R} \\ \gamma_{12R} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{ijR} = 2 \varepsilon_{ijR} \text{ pour } i \neq j \quad \hat{\sigma}_R = \hat{C}_R \hat{\varepsilon}_R$$

4.

Les fils sont assemblés les uns à côté des autres. Pour un effort global donné sur la tresse de fils, l'allongement est le même pour tous les fils. Donc chaque fil supporte un effort égal à l'effort global divisé par le nombre de fils. En fait on peut considérer que l'on a une association de ressorts en parallèle. La raideur globale est donc égale à la somme des raideurs des éléments constituants. Pratiquement la raideur de l'ensemble des fils est donc égale à la raideur d'un fil multipliée par le nombre de fils.

$$K = k n r$$

Cela nous permet d'écrire la matrice de raideur du réseau de fils **A**. Cette fois le résultat est donné dans la base $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$. Bien entendu la matrice est très simple.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11A} \\ \sigma_{22A} \\ \sigma_{33A} \\ \sigma_{23A} \\ \sigma_{31A} \\ \sigma_{12A} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11A} \\ \varepsilon_{22A} \\ \varepsilon_{33A} \\ \gamma_{23A} \\ \gamma_{31A} \\ \gamma_{12A} \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_A = \hat{C}_A \hat{\varepsilon}_A$$

Il est évident que nous avons le même résultat pour le réseau de fils **B** en faisant bien attention au changement d'orientation.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11B} \\ \sigma_{22B} \\ \sigma_{33B} \\ \sigma_{23B} \\ \sigma_{31B} \\ \sigma_{12B} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11B} \\ \varepsilon_{22B} \\ \varepsilon_{33B} \\ \gamma_{23B} \\ \gamma_{31B} \\ \gamma_{12B} \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_B = \hat{C}_B \hat{\varepsilon}_B$$

5.

Pour chaque matériau la densité d'énergie de déformation est donnée par le demi-produit scalaire des composantes de contraintes par les composantes de déformations:

$$\frac{dU_i}{dv} = \frac{1}{2} \sigma_i^T \cdot \hat{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_i^T \cdot \hat{C}_i \cdot \hat{\varepsilon}_i$$

En fait chacune des matrices de rigidité des matériaux est symétrique et elles sont donc égales à leurs transposées.

$$\frac{dU_i}{dv} = \frac{1}{2} \varepsilon_i^T \cdot \hat{C}_i \cdot \hat{\varepsilon}_i$$

On suppose que les fibres sont uniformément réparties dans la matrice de résine :

$$U_i = \int_{V_i} \frac{dU_i}{dv} dV_i = \int_V \frac{dU_i}{dv} n_i dV \quad \text{avec } n_R = \frac{V_R}{V_T} = \frac{V_T - V_A - V_B}{V_T} = 1 - n_A - n_B$$

D'autre part, comme les déplacements sont les mêmes pour les fils, la résine et le matériau homogène équivalent, on peut en déduire que les déformations sont les mêmes aussi.

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_R = \hat{\varepsilon}_A = \hat{\varepsilon}_B = \hat{\varepsilon}$$

Cela nous permet d'obtenir la matrice de raideur du matériau équivalent qui en fait est une combinaison linéaire des matrices de raideur au compte prorata des volumes des matériaux utilisés.

$$\hat{C} = n_i \hat{C}_i = (1 - n_A - n_B) \hat{C}_R + n_A \hat{C}_A + n_B \hat{C}_B$$

La structure détaillée de la matrice de raideur montre clairement l'effet raidisseur des deux faisceaux de fibres.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_R + K_A & \beta_R & \beta_R & 0 & 0 & 0 \\ \beta_R & \alpha_R + K_B & \beta_R & 0 & 0 & 0 \\ \beta_R & \beta_R & \alpha_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_R = \frac{n_R E_R}{1 - 2\nu_R}$$

$$\beta_R = \frac{n_R E_R \nu_R}{(1 + \nu_R)(1 - 2\nu_R)}$$

$$\gamma_R = \frac{n_R E_R}{2(1 + \nu_R)}$$

$$K_A = n_A K = 2 n_A k n r$$

$$K_B = n_B K = 2 n_B k n r$$

6.

On connaît la matrice de raideur dans la base naturelle des fibres, mais il est nécessaire de la connaître dans une autre base. Bien entendu la pensée immédiate est d'utiliser les relations de changement de base, mais il ne faut pas perdre de vue que le tenseur de raideur est un tenseur d'ordre 4 et qu'il convient d'employer 4 fois la matrice de changement de base ce qui conduit à des calculs relativement lourds.

$$T = t^{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l = T^{IJKL} \vec{E}_I \otimes \vec{E}_J \otimes \vec{E}_K \otimes \vec{E}_L$$

$$t^{ijkl} = b_i^i b_j^j b_k^k b_l^l T^{IJKL} \quad T^{IJKL} = a_i^I a_j^J a_k^K a_l^L t^{ijkl}$$

Pour éviter cette lourdeur, on peut utiliser le fait que l'énergie de déformation est invariante. L'expression donnée dans la base naturelle est la même que celle obtenue dans la base cylindrique. On rappelle que l'énergie de déformation du matériau équivalent est égale à la somme des énergies de déformation des matériaux constituants.

$$U_{\text{déf mat équi}} = U_{\text{déf rés}} + U_{\text{déf filsA}} + U_{\text{déf filsB}} \Leftrightarrow U_E = U_R + U_A + U_B$$

La loi de comportement de la matrice en résine est une loi de matériau isotrope. Donc le représentant matriciel du tenseur de raideur est le même quelle que soit la base pour l'exprimer.

$$\hat{C}_R = \begin{pmatrix} \alpha_R & \beta_R & \beta_R & 0 & 0 & 0 \\ \beta_R & \alpha_R & \beta_R & 0 & 0 & 0 \\ \beta_R & \beta_R & \alpha_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R \end{pmatrix}_{(\vec{N}_i)} = \begin{pmatrix} \alpha_R & \beta_R & \beta_R & 0 & 0 & 0 \\ \beta_R & \alpha_R & \beta_R & 0 & 0 & 0 \\ \beta_R & \beta_R & \alpha_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R \end{pmatrix}_{(\vec{N}_r, \vec{N}_\theta, \vec{N}_z)}$$

Par contre, il n'en est pas de même pour les fils. Donnons tout d'abord l'expression de l'énergie de déformation du réseau de fils A calculée dans la base naturelle.

$$U_A = \frac{n_A}{2} \int_V \overset{T}{\sigma}_A \overset{\wedge}{\varepsilon}_A dV = \frac{n_A}{2} \int_V \overset{T}{\varepsilon}_A C_A \overset{\wedge}{\varepsilon}_A dV = \frac{n_A}{2} \int_V K \varepsilon_{11A}^2 dV$$

Comme on constate qu'elle est fonction de la première coordonnée du tenseur des déformations dans la base naturelle, il faut exprimer sa valeur dans la base cylindrique.

$$\varepsilon_{11A} = \varepsilon_{11} = \overrightarrow{N}_1 \cdot \varepsilon \overrightarrow{N}_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\overrightarrow{N}_\theta - \overrightarrow{N}_z) \right] \varepsilon \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\overrightarrow{N}_\theta - \overrightarrow{N}_z) \right]$$

Pour cela, on développe le calcul dans la base cylindrique

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (0, 1, -1) \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\theta\theta} - 2\varepsilon_{\theta z} + \varepsilon_{zz})$$

Ce qui donne une nouvelle expression de l'énergie de déformation du réseau de fils A.

$$U_A = \frac{n_A}{2} \int_V K \frac{1}{4} (\varepsilon_{\theta\theta}^2 + 4\varepsilon_{\theta z}^2 + \varepsilon_{zz}^2 - 4\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta z} - 4\varepsilon_{\theta z}\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{zz}\varepsilon_{\theta\theta}) dV$$

C'est une forme quadratique vis-à-vis des termes de déformation et l'on peut y associer une formulation matricielle.

$$U_A = \frac{n_A K}{8} \int_V (\varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{pmatrix} dV$$

$$U_A = \frac{n_A K}{8} \int_V (\varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{\theta z}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\theta z} \end{pmatrix} dV$$

On peut donc en déduire la matrice de raideur des fils A dans la nouvelle base.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rA} \\ \sigma_{\theta A} \\ \sigma_{zA} \\ \sigma_{\theta z A} \\ \sigma_{zr A} \\ \sigma_{r\theta A} \end{pmatrix} = \frac{K_A}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rA} \\ \varepsilon_{\theta A} \\ \varepsilon_{zA} \\ \gamma_{\theta z A} \\ \gamma_{zr A} \\ \gamma_{r\theta A} \end{pmatrix}$$

De la même façon, il faut exprimer l'énergie de déformation du réseau de fils B.

$$U_B = \frac{n_B}{2} \int_V K \frac{1}{4} (\varepsilon_{\theta\theta}^2 + 4\varepsilon_{\theta z}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 4\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta z} + 4\varepsilon_{\theta z}\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{zz}\varepsilon_{\theta\theta}) dV$$

$$U_B = \frac{n_B K}{8} \int_V (\varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{\theta z}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\theta z} \end{pmatrix} dV$$

Ce qui nous donne la matrice de raideur du réseau de fils B dans la nouvelle base.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rB} \\ \sigma_{\theta B} \\ \sigma_{zB} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_B}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rB} \\ \varepsilon_{\theta B} \\ \varepsilon_{zB} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{r\theta} \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la matrice de raideur du matériau homogène équivalent, il suffit donc maintenant d'additionner termes à termes chacune des composantes des trois matrices de raideur.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_R & \beta_R & \beta_R & 0 & 0 & 0 \\ \beta_R & \alpha_R + \frac{K_A + K_B}{4} & \beta_R + \frac{K_A + K_B}{4} & -\frac{K_A + K_B}{4} & 0 & 0 \\ \beta_R & \beta_R + \frac{K_A + K_B}{4} & \alpha_R + \frac{K_A + K_B}{4} & -\frac{K_A + K_B}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_A + K_B}{4} & -\frac{K_A + K_B}{4} & \gamma_R + \frac{K_A + K_B}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{r\theta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_R & \beta_R & \beta_R & 0 & 0 & 0 \\ \beta_R & \alpha_R + K' & \beta_R + K' & K'' & 0 & 0 \\ \beta_R & \beta_R + K' & \alpha_R + K' & K'' & 0 & 0 \\ 0 & K'' & K'' & \gamma_R + K' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{r\theta} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_R = \frac{n_R E_R}{1 - 2\nu_R}$$

$$\beta_R = \frac{n_R E_R \nu_R}{(1 + \nu_R)(1 - 2\nu_R)}$$

$$\gamma_R = \frac{n_R E_R}{2(1 + \nu_R)}$$

$$K' = \frac{K_A + K_B}{4}$$

$$K'' = -\frac{K_A + K_B}{4}$$

7.

Cette application nous aura permis de comprendre comment on peut élaborer la loi de comportement d'un matériau homogène réalisé à partir de différents matériaux de base. Dans la pratique, il faut être capable de définir le plus correctement possible le comportement des matériaux de base pour ensuite utiliser ce procédé.

5-1

ELASTICITE LINEAIRE

Limites d'élasticité

1.

Avec la loi de comportement, nous avons maintenant tous les outils pour faire une étude mécanique complète. Nous allons faire ces études dans le cadre très courant, mais aussi très simple, de l'élasticité linéaire. Nous utiliserons cette loi de comportement en supposant que le milieu est isotrope ce qui simplifiera encore. Mais avant, il nous faut définir les limites d'utilisation d'une telle loi de comportement car il est évident que pour tout matériau dès lors que les sollicitations seront trop élevées, nous atteindrons un endommagement, voire une rupture.

2.

Nous avons établi des relations valables si le matériau est homogène, isotrope, si la transformation est continue, infinitésimale, monotherme réversible, si le domaine ne subit aucune transformation chimique, ni de changement d'état et si le comportement est linéaire.

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + 2\mu\bar{\varepsilon} + \left(\lambda \text{tr}(\bar{\varepsilon}) - \beta(T - T^0) \right) \bar{I} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^0) + \left[\alpha(T - T^0) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^0) \right] \bar{I}$$

Nous voyons clairement les contributions de l'état de contraintes initiales et de la température. Mais souvent on considérera que les contraintes initiales sont négligeables et la température est constante. Ce qui nous donne des formules encore plus simples.

$$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{I} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \left[\frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\sigma}) \right] \bar{I}$$

Il est aussi possible de donner des formulations indicielles équivalentes. Le milieu étant isotrope, ces relations sont valables dans n'importe quelle base. Il convient de noter qu'il est possible de calculer l'état de contrainte à partir de la connaissance de l'état de déformation et inversement.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}I_1\delta_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

Il est bien entendu que pour cette loi de comportement, seuls deux coefficients sont indépendants. Si bien que nous avons des relations entre les deux coefficients de Lamé, le module d'Young et le coefficient de Poisson. Il est à noter que souvent le premier coefficient de Lamé est appelé le module de Coulomb ou encore module d'élasticité transversal par opposition au module d'Young qui est aussi appelé le module d'élasticité longitudinal.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

3.

Ces différents coefficients sont essentiellement fonctions du matériau utilisé. Toutefois, ils peuvent aussi dépendre de paramètres comme par exemple la température. Les coefficients de Lamé et le module d'Young sont homogènes à des pressions et s'expriment généralement en gigapascal. Le coefficient de Poisson est adimensionnel.

Matériaux	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Masse Volumique (kg/dm ³)
Acier de construction	210	0,285	7,8
Acier Inox 18-12	203	0,29	7,9
Fonte grise	90 à 120	0,29	7,1 à 7,2
Alliage TA6V	105	0,25	7,8
Aluminium	71	0,34	2,6
Zinc	78	0,21	7,15
Titane	105	0,34	4,5
Verre	60	0,25	2,8
Béton en compression	10 à 13	0,15	2 à 2,4
Caoutchouc	0,2	0,5	1,8
Bois (pin)	7	0,2	0,4
Marbre	26	0,3	2,8
Graphite	250 à 350	0,3 à 0,4	1,75 à 1,92
Elastomère	0,2	0,5	1

4.

Nous avons maintenant toutes les équations nécessaires pour trouver les inconnues mais parfois, pour un peu plus d'efficacité, nous pouvons utiliser des équations complémentaires obtenues par combinaison des équations de base. C'est le cas des équations de Navier qui traduisent le principe fondamental de la mécanique en fonction du champ de déplacement. Pour les obtenir, nous allons partir du principe fondamental de la mécanique exprimé de façon classique en contraintes, puis utiliser la loi de comportement pour avoir une expression en fonction des déformations. Enfin l'utilisation des relations déformations déplacements conduit au résultat escompté.

Nous partons donc de l'équation de résultante issue du principe fondamental de la mécanique :

$$\overline{\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})} + \rho(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{\gamma}}) = \underline{\underline{0}}$$

L'introduction de la loi de comportement élastique linéaire pour un matériau isotrope nous permet d'obtenir une nouvelle formulation :

$$2\mu \overline{\text{div}(\underline{\underline{\varepsilon}})} + \lambda \overline{\text{grad}(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}))} + \rho(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{\gamma}}) = \underline{\underline{0}}$$

Mais nous avons aussi des relations fondamentales issues de l'analyse tensorielle :

$$\overline{\text{div}(\underline{\underline{\varepsilon}})} = \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\mathbf{grad}(\underline{\underline{u}}))} + \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\mathbf{grad}(\underline{\underline{u}})^T)}$$

$$\overline{\text{div}(\underline{\underline{\varepsilon}})} = \frac{1}{2} \Delta(\underline{\underline{u}}) + \frac{1}{2} \overline{\text{grad}(\text{div}(\underline{\underline{u}}))}$$

$$\theta = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \text{div}(\underline{\underline{u}})$$

Ce qui nous permet d'obtenir la forme finale dite équations de Navier. Avec l'analyse tensorielle, nous pouvons en donner deux expressions équivalentes.

$$\mu \Delta(\vec{u}) + (\mu + \lambda) \overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) = \vec{0}$$

$$(\lambda + 2\mu) \overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))} - \mu \overline{\text{rot}(\text{rot}(\vec{u}))} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) = \vec{0}$$

On peut aussi apporter une démonstration en utilisant la notation indicielle. En travaillant dans une base cartésienne, on peut relier la dérivée des composantes du tenseur des contraintes aux dérivées des composantes du tenseur des déformations.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \delta_{ij} = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

Cela nous donne alors une expression indicielle traduisant le principe fondamental de la mécanique exprimé en déformations.

$$2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

Il nous suffit maintenant d'utiliser les relations entre le tenseur des déformations et le vecteur déplacement pour obtenir, en quelques étapes, la relation indicielle traduisant les équations de Navier.

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

Cette formulation indicielle est équivalente à la formulation tensorielle.

$$\mu \Delta u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho(f_i - \gamma_i) = 0$$

5.

On peut aussi en déduire une relation scalaire en appliquant l'opérateur divergence :

$$\mu \text{div}[\Delta(\vec{u})] + (\mu + \lambda) \text{div}[\overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))}] + \text{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] = 0$$

On peut alors utiliser des relations issues de l'analyse tensorielle :

$$\text{div}[\Delta(\vec{u})] = \Delta[\text{div}(\vec{u})]$$

$$\text{div}[\overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))}] = \Delta[\text{div}(\vec{u})]$$

Et en définitive on obtient une équation scalaire qui bien entendu ne remplace pas complètement les équations de Navier mais qui sera néanmoins parfois utilisée.

$$(2\mu + \lambda) \Delta[\text{div}(\vec{u})] + \text{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] = 0$$

A partir de cette équation, on constate que dans le cas d'un domaine à masse volumique constante, en équilibre et placé dans un champ de force à divergence nulle, le laplacien de la divergence du vecteur déplacement est nul.

$$\rho = cte, \vec{\gamma} = \vec{0}, \operatorname{div}(\vec{f}) = 0 \Rightarrow \Delta[\operatorname{div}(\vec{u})] = \Delta\theta = 0$$

6.

Un autre lot d'équations supplémentaires est donné par les équations de Beltrami qui vont traduire en fonction des composantes du tenseur des contraintes les conditions de compatibilité des déformations.

Ces dernières ont une forme relativement complexe lorsqu'elles sont données en fonction du tenseur des déformations.

$$\operatorname{grad} \operatorname{div}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \left(\operatorname{grad} \operatorname{div}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \right)^T - \operatorname{grad} \left(\operatorname{grad} \left[\operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \right] \right) - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$$

Pour y introduire le tenseur des contraintes, nous utilisons la loi de comportement sous la forme des équations de Hooke.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \left[\frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta \varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\Delta \sigma}} - \left[\frac{\nu}{E} \Delta(\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}})) \right] \underline{\underline{I}}$$

On peut, à partir de cette formulation, établir un lien entre les traces des tenseurs déformations et contraintes.

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = I_1 = \frac{E}{1-2\nu} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{E}{1-2\nu} \theta \quad \Delta I_1 = \frac{E}{1-2\nu} \Delta \theta$$

On utilise ensuite la forme scalaire des équations de NAVIER

$$(2\mu + \lambda)\Delta\theta = \operatorname{div}[\rho(\vec{\gamma} - \vec{f})] \Rightarrow \Delta I_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \operatorname{div}[\rho(\vec{\gamma} - \vec{f})]$$

Nous avons aussi des formules d'analyse tensorielle

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{grad}(I_1)$$

$$\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \underline{\underline{\varepsilon}} \right) = \frac{1+\nu}{E} \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \right) - \frac{\nu}{E} \operatorname{grad} \left[\operatorname{grad}(I_1) \right]$$

$$\left(\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \right)^T = \frac{1+\nu}{E} \left(\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \right) \right)^T - \frac{\nu}{E} \operatorname{grad} \left[\operatorname{grad}(I_1) \right]$$

Et pour compléter, on peut utiliser le principe fondamental de la mécanique

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \rho(\vec{\gamma} - \vec{f})$$

Ce qui nous permet d'obtenir une nouvelle formulation des équations de compatibilité

$$\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \right) + \left(\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \right) \right)^T - \frac{1}{1+\nu} \operatorname{grad} \left(\operatorname{grad}(I_1) \right) - \Delta \underline{\underline{\sigma}} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \operatorname{div}[\rho(\vec{\gamma} - \vec{f})] \underline{\underline{I}} = \vec{0}$$

Equation qui peut aussi avoir une déclinaison sous forme indicielle

$$\frac{\partial[\rho(\gamma_i - f_i)]}{\partial x_j} + \frac{\partial[\rho(\gamma_j - f_j)]}{\partial x_i} - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \text{div}[\rho(\vec{\gamma} - \vec{f})] \delta_{ij} = 0$$

Comme dans le cas des équations de Navier, on obtient une formulation simplifiée dans le cas d'un domaine à masse volumique constante, en équilibre et placé dans un champ de force volumique à divergence nulle.

$$\rho = cte, \quad \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad \text{div}(\vec{f}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{1+\nu} \mathbf{grad}(\overline{\text{grad}(I_1)}) + \overline{\Delta \sigma} = \vec{0} \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} + \Delta \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

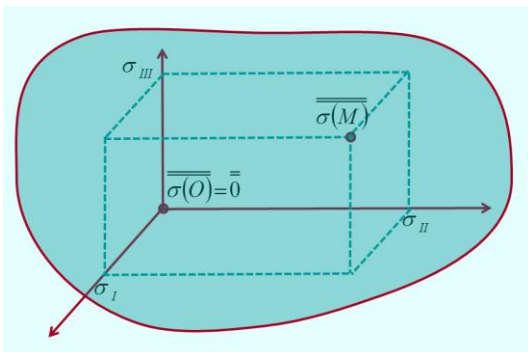
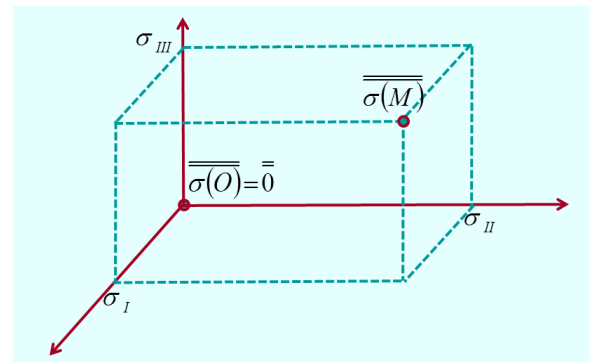
7.

Les études mécaniques que nous avons à faire ont pour but de dimensionner les structures en fonction des chargements appliqués. Mais, dans le but d'économie d'énergie, il faut éviter d'utiliser trop de matière, ce qui nous conduit à un dimensionnement à minima. Pour cela, il faut venir aux limites de comportement de notre matériau sans en dépasser les frontières. Cela nous conduit à exprimer ces frontières qui vont être déterminées par des expériences.

On pourrait définir ces frontières dans l'état de déformation, mais en fait on les exprime en fonction de l'état de contrainte. Comme nous avons vu que ce dernier était essentiellement déterminé dans une base principale par ses valeurs propres, on peut envisager que l'expression déterminant la frontière soit une relation entre les contraintes principales.

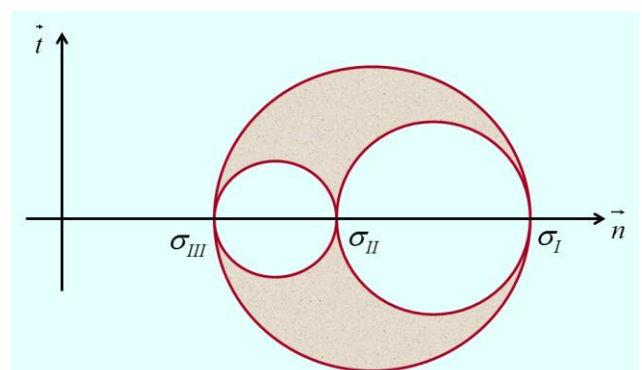
$$F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, c_1, c_2, \dots, c_n) \leq 0$$

Cela revient à dire que l'on peut travailler dans un espace tridimensionnel, les coordonnées sur les axes de bases étant les valeurs propres de l'état de contrainte étudié. Donc, pour chaque état de contrainte, on pourra associer un point dans cet espace. En particulier, le point origine du repère est associé à un état de contrainte nul.



Et dans cet espace, il existe une surface fermée, enfermant nécessairement le point origine, et définissant le domaine permmissif de l'état de contrainte. Tout point situé dans le domaine délimité par la surface fermée représente un état de contrainte autorisé. Mais lorsque ce point est situé sur la surface enveloppe, on peut considérer que nous sommes en état limite.

Le problème est que cette représentation est tridimensionnelle et donc difficilement exploitable. C'est la raison pour laquelle nous allons essayer de déterminer cette surface enveloppe dans une représentation bidimensionnelle, celle du plan de Mohr, plan dans lequel tout état de contrainte sera représenté par un tricercle.



8.

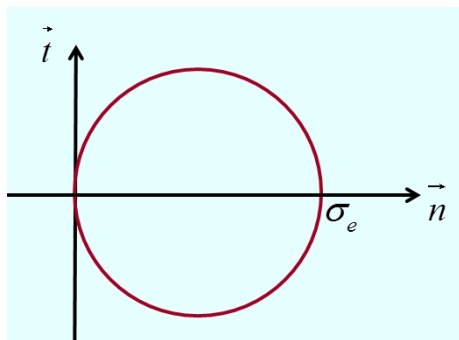
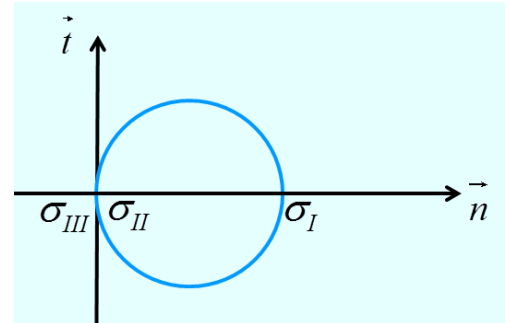
Pour déterminer cette surface enveloppe, nous allons nous appuyer sur les tests et expériences. Le résultat le plus simple à mettre en évidence est celui obtenu par un essai de traction uniaxiale. Cet essai nous permet d'obtenir en certains points de l'éprouvette un tenseur des contraintes très simple, caractérisé par une seule valeur non nulle, celle de la contrainte normale dans la direction de traction.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

On obtient facilement les trois contraintes principales dont deux sont nulles.

$$\sigma_I = \sigma ; \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

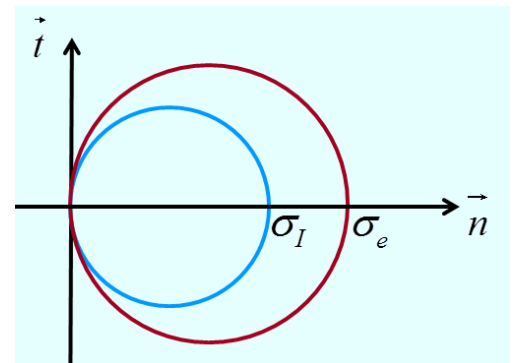
Cela nous donne un tricercale de Mohr très particulier puisque deux cercles sont confondus et que le troisième est un cercle de rayon nul positionné sur le point origine du repère.



Expérimentalement, on constate que lorsque l'on a atteint une certaine contrainte, dite limite d'élasticité en traction, notre matériau entre dans un domaine plastique caractérisé par des déformations irréversibles. Il existe donc un tricercale de Mohr limite caractérisé par cette limite d'élasticité en traction.

Donc, tant que notre contrainte de traction est inférieure à cette limite d'élasticité en traction, le domaine reste avec la loi de comportement élastique linéaire. En conséquence, tout état de traction uniaxiale donnant un tricercale à l'intérieur du cercle précédent est considéré comme étant encore à loi de comportement élastique linéaire.

$$\sigma \leq \sigma_e \Rightarrow \sigma_I \leq \sigma_e$$

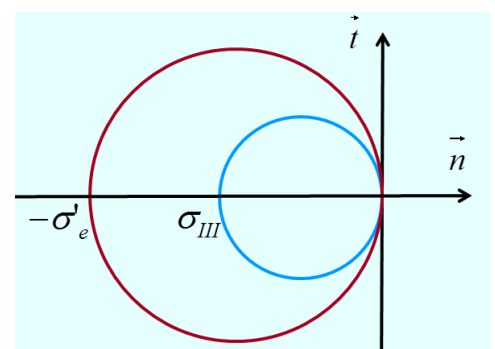


9.

De façon symétrique, on peut s'intéresser à l'essai de compression uniaxiale d'une éprouvette. En certains points de l'éprouvette, le tenseur des contraintes se présente sous la même forme que dans le cas de la traction uniaxiale, mais cette fois la contrainte normale dans la direction de la sollicitation est négative.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

Le tricercale de Mohr se positionne alors dans la partie négative des contraintes normales.



Et l'on obtient aussi un tricercler limite. En général, la limite d'élasticité en compression uniaxiale est, en valeur absolue, supérieure à la limite d'élasticité en traction uniaxiale.

$$\sigma \leq \sigma'_e \Rightarrow -\sigma_{III} \leq \sigma'_e$$

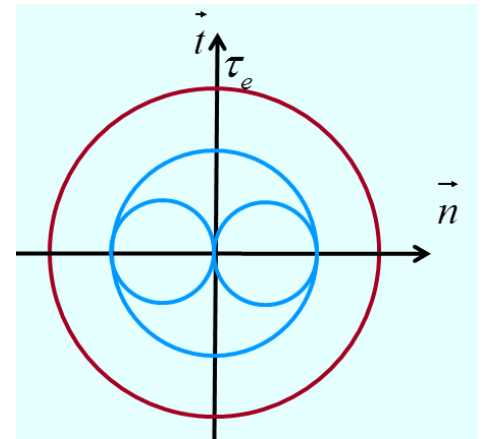
10.

Une sollicitation de cisaillement peut être obtenue par exemple dans le cas d'une éprouvette se présentant sous la forme d'un tube circulaire de faible épaisseur et sollicité en torsion. Dans un repère cylindrique naturel, le tenseur des contraintes ne fait alors apparaître qu'une composante tangentielle.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

On peut alors facilement préciser les composantes de ce tenseur contrainte dans la base des vecteurs propres.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} (\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III}) \quad (\sigma_I = \tau, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} = -\tau)$$



On peut en déduire la forme du tricercler de Mohr.

En pratique, on constate à nouveau que, si l'on veut rester dans le domaine d'élasticité linéaire, la sollicitation imposée à l'éprouvette ne doit pas dépasser une certaine valeur limite, ce qui impose un rayon maximal au plus grand des cercles.

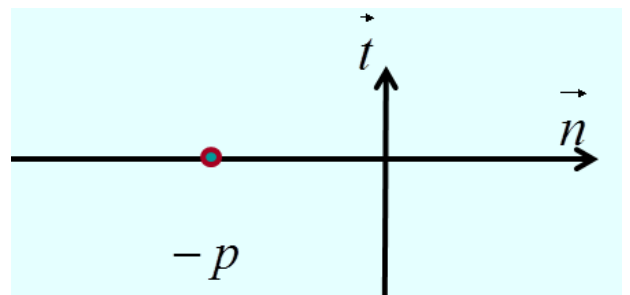
$$\tau \leq \tau_e$$

11.

La sollicitation de compression isotrope est obtenue en appliquant une pression uniforme sur la surface extérieure délimitant l'éprouvette d'étude. On obtient alors en tout point du domaine un tenseur contrainte proportionnel au tenseur d'identité.

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$$

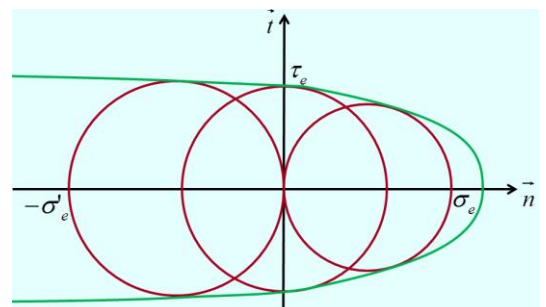
Le tricercler de Mohr se réduit à un point placé sur l'axe normal du plan de Mohr dans la partie négative.



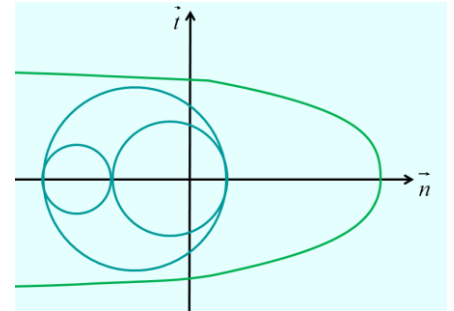
Concrètement on ne peut pas faire apparaître de limitation. Quel que soit la pression appliquée, lorsque qu'elle est supprimée, le domaine reprend sa forme et ses dimensions initiales. On est donc constamment dans le domaine élastique linéaire.

12.

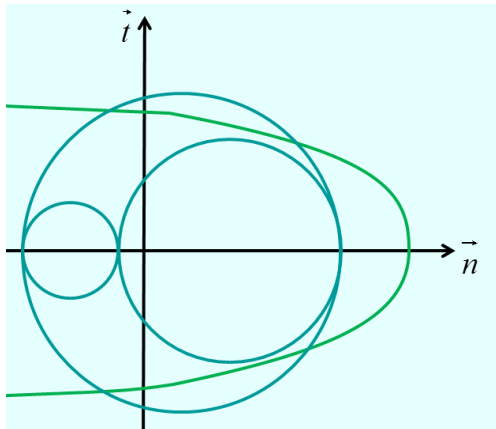
On constate donc que, suivant la sollicitation, nous avons plusieurs réponses. Est-il possible, à partir de tous ces résultats d'uniformiser la réponse ? C'est la tentative du critère de limite élastique de Mohr Caquot. Pour l'exprimer il suffit de partir de l'ensemble des cercles limites précédemment obtenus.



L'idée est que dans ce plan de Mohr, il existe une courbe enveloppe de toutes ces conditions limites et aussi d'autres obtenues avec des essais combinés comme par exemple de la traction torsion.



Dans le cas d'une sollicitation donnant un tricercler de Mohr à l'intérieur de la courbe enveloppe, le domaine reste dans le domaine élastique linéaire.



Par contre dès lors que le tricercler est séquent avec la courbe enveloppe, cela signifie que l'on est sorti de la loi de comportement élastique linéaire. Il faut alors soit reprendre les calculs avec une nouvelle loi de comportement, soit modifier le chargement ou la structure pour rester en dessous de la limite.

Cette solution de critère de limite élastique est certainement une bonne réponse mais il faut établir la courbe limite ce qui nécessite de nombreux essais et c'est trop onéreux pour être effectivement utilisé dans l'industrie. Il est préférable de trouver d'autres solutions pour établir les limites d'utilisation de la loi d'élasticité linéaire.

13.

Parmi ces autres solutions, le critère de Von Misès est l'un des plus fréquemment utilisé. L'idée est que le matériau ne peut emmagasiner de l'énergie de déformation que jusqu'à une certaine limite.

Nous connaissons l'expression différentielle de cette énergie de déformation.

$$dW_{def} = \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\overline{d\varepsilon}}}} dv = \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma_{ij}}}} d\overline{\overline{\overline{\varepsilon_{ij}}}} dv$$

L'intégration est simple dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire qui traduit une proportionnalité entre l'état de contrainte et l'état de déformation

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma_{ij}}}} \overline{\overline{\overline{\varepsilon_{ij}}}} dv = \frac{1}{2} \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\overline{\varepsilon}}}} dv$$

Mais une simple limitation de l'énergie de déformation ne permet pas de prendre en compte les résultats de l'essai de compression isotrope pour lequel il n'existe aucune limite de chargement. Cet essai se traduisant par un état de contrainte purement sphérique, sans partie déviatorique, il est suggéré de décomposer l'énergie de déformation en partie sphérique et en partie déviatorique. Il est à noter qu'il existe un découplage complet entre ces deux contributions.

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma_S}} \otimes \overline{\overline{\overline{\varepsilon_S}}}} dv + \frac{1}{2} \int_D \overline{\overline{\overline{\sigma_D}} \otimes \overline{\overline{\overline{\varepsilon_D}}}} dv = (W_{def})_S + (W_{def})_D$$

Pour définir la limite d'élasticité, le critère de Von Misès se traduit par une inégalité.

$$\left(\frac{dW_{def}}{dv} \right)_D = \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{\sigma_D}} \otimes \overline{\overline{\overline{\varepsilon_D}}}} = \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{[(\sigma_{ij})_D (\varepsilon_{ij})_D]}}} \leq K$$

En utilisant les résultats de l'essai de traction, on peut fixer la valeur de la constante limitant l'énergie de déformation déviatorique.

$$tr(\overline{\sigma_D}^2) \leq \frac{2}{3} \sigma_e^2$$

Ce qui nous donne une expression relativement simple en fonction des contraintes principales.

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \leq 2\sigma_e^2$$

Un autre critère peut être obtenu en considérant que c'est essentiellement le cisaillement qui est générateur de déformations plastiques. Ainsi, il apparaît naturel de limiter la valeur de la contrainte tangentielle maximale qui correspond en fait au rayon du plus grand des cercles de Mohr. On obtient alors le critère de Tresca.

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \leq \tau_e$$

Ces critères sont très simples à établir et très simples à mettre en œuvre. On obtient des expressions numériques qui peuvent facilement être traitées dans des logiciels de calcul. Mais bien entendu, ces simplicités se traduisent par des pertes en efficacité et il existe des cas où ces critères sont pris en défaut. Mais en général, ces cas correspondent à des états ayant des composantes très fortes en traction isotrope, sollicitations très dures à obtenir et très peu fréquentes dans la réalité. Dans les domaines à fortes composantes de compression, ces critères sont en général sécurisants.

14.

Comme nous venons de le constater, nous avons des limites naturelles pour l'utilisation d'une loi de comportement. Les expériences vont nous permettre de déterminer ces limites. Lors des calculs, il faudra bien entendu s'assurer que ces limites soient bien respectées.

5-2

ELASTICITE LINEAIRE

Schémas de résolution

1.

A priori, nous avons maintenant tous les outils pour traiter un problème de mécanique. Pour arriver à cela nous avons utilisé beaucoup d'hypothèses simplificatrices. Hélas, nous allons nous rendre compte que souvent cela ne sera pas suffisant et que nous ne pourrons trouver des solutions analytiques exactes que dans très peu de cas.

2.

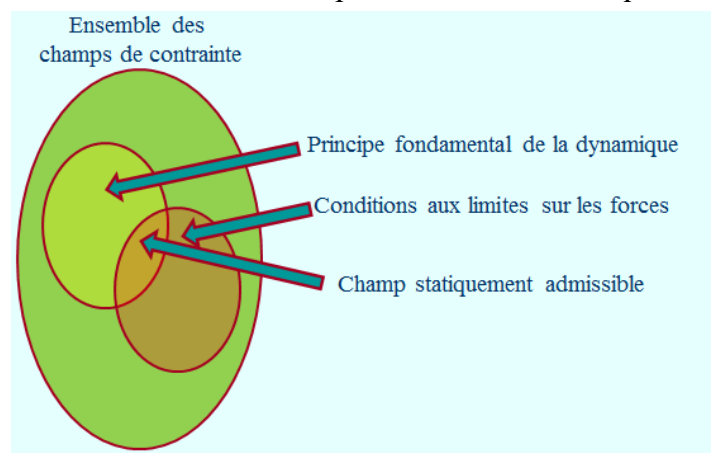
Nous avons à déterminer 15 fonctions scalaires. Les trois composantes du vecteur déplacement, les six composantes du tenseur des déformations et les six composantes du tenseur des contraintes. Dans le cas d'un comportement solide, la masse n'est pas vraiment une inconnue.

A notre disposition, nous avons 15 équations. Les relations scalaires entre le vecteur déplacement et le tenseur des déformations sont au nombre de six. L'équation de résultante issue du principe fondamental de la mécanique nous apporte 3 conséquences scalaires. Enfin nous avons complété avec les six équations issues de notre loi de comportement. L'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse est surtout utile pour des éléments fluides ou gazeux, mais elle présente très peu d'intérêt dans le cas d'un comportement solide. Toutefois, même si nous avons le bon nombre d'équations vis-à-vis du nombre d'inconnues, il nous reste une difficulté de taille. Ces équations ne sont pas linéaires, mais différentielles et il n'est malheureusement pas possible de les résoudre analytiquement. On peut par exemple utiliser une méthode numérique utilisant les éléments finis et l'ordinateur pour donner des réponses approchées. Mais il est nécessaire de caler ce procédé numérique et pour cela, il est bien de connaître, au moins pour quelques cas particuliers, des réponses analytiques.

3.

La détermination de ces solutions nécessite des simplifications, mais elle est aussi basée sur le fait que la réponse existe et est unique. C'est le cas lorsque l'on associe un champ de contrainte statiquement admissible à un champ de déformation cinématiquement admissible. Regardons ce qui se cache derrière ces nouveaux vocables.

Considérons l'ensemble des champs de contraintes. Dans cet ensemble, certains ne respectent pas le principe fondamental de la mécanique, mais bien entendu nous nous intéresserons tout spécialement à ceux qui sont en accord avec ce principe. D'autre part, nous avons aussi un sous ensemble désignant les champs de contraintes en cohérence avec les conditions de chargement imposées sur la surface du domaine étudié.

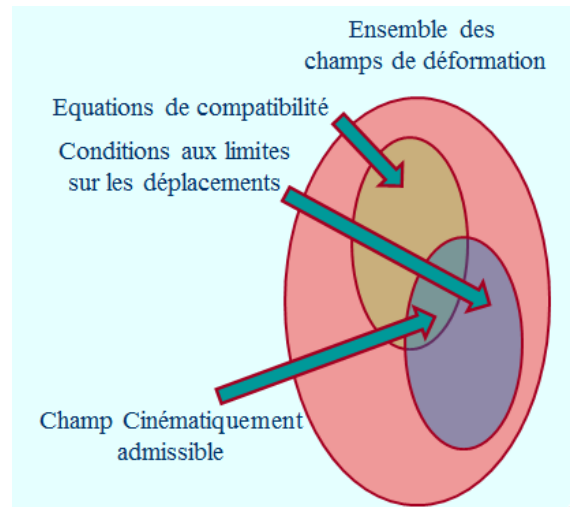


Et bien entendu le champ de contrainte que nous recherchons doit satisfaire à ces deux conditions. Tous les champs de contrainte dans ce cas sont dits statiquement admissibles

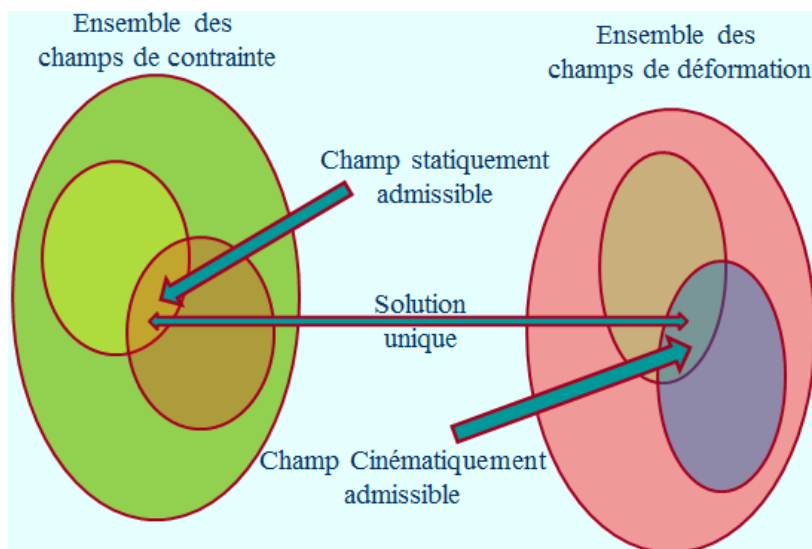
4.

De façon duale, on peut s'intéresser à l'ensemble des champs de déformation.

Il y a un sous ensemble qui représente les champs de déformations en accord avec les conditions de compatibilités. Et puis il y a aussi un sous ensemble dans lequel on retrouve les champs de déformation permettant de satisfaire aux conditions aux limites sur les déplacements imposés en surface du domaine d'étude. A nouveau, seuls les champs de déformation respectant ces deux conditions sont ceux qui nous intéressent. On parle alors de champs de déformation cinématiquement admissibles.



Par l'intermédiaire de la loi de comportement, on peut définir de nombreux couples entre ces deux grands ensembles. Dans le cas d'un problème pour lequel en chaque point de la surface délimitant le domaine on peut définir soit le chargement, soit le déplacement, on démontre qu'il n'existe qu'un seul couple constitué par un tenseur contrainte statiquement admissible et un tenseur déformation cinématiquement admissible, ces deux états tensoriels étant reliés entre eux par la loi de comportement. C'est le théorème d'unicité de la solution. La démonstration de ce théorème peut se faire par l'absurde. En effet, si l'on admet qu'il existe deux solutions différentes pour une sollicitation donnée, en appliquant le théorème de superposition et en faisant la différence entre ces deux solutions, on obtient un état de contrainte non nul pour une sollicitation nulle.



5.

Avec ce théorème d'unicité, nous pouvons envisager une méthode de détermination de solution d'un problème de mécanique basée sur la notion de schémas de résolution. L'idée est de partir d'hypothèses spécifiques à l'étude, hypothèses permettant de réduire le nombre d'inconnues et de paramètres. Par exemple dans un problème parfaitement axisymétrique, on pourra considérer que l'angle de position angulaire n'est pas un paramètre de ce problème. Ensuite, on essaie de démontrer que ces hypothèses permettent d'avoir un champ de contrainte statiquement admissible associé par l'intermédiaire de la loi de comportement à un champ de déformation cinématiquement admissible. Ce qui implique quelques calculs et vérifications. Si l'on peut obtenir un tel binôme, alors, par le théorème d'unicité, on peut affirmer détenir la solution du problème. Il existe plusieurs schémas de résolution possible.

On peut par exemple formuler des hypothèses sur l'état de contrainte.

Ensuite on vérifie le principe fondamental de la mécanique.

Si les hypothèses émises ne permettent pas de respecter ce principe, il faut les revoir.

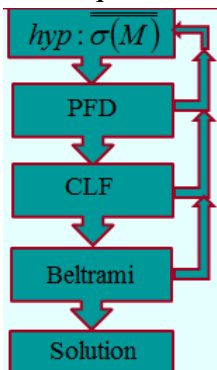
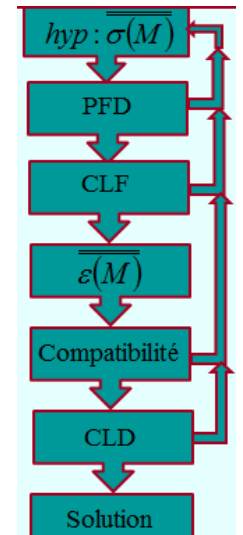
Par contre, si nous n'avons pas d'incompatibilité, on peut poursuivre en testant le respect des conditions aux limites sur les forces imposées en surface du domaine.

Dans le cas où ce test est positif, le tenseur des contraintes étant statiquement admissible, on peut alors passer au calcul des composantes du tenseur des déformations en utilisant la loi de Hooke.

Puis on regarde si le tenseur obtenu respecte les équations de compatibilités.

Enfin, on termine en test les conditions aux limites en déplacements imposés.

Si tous ces deux derniers tests sont positifs, le tenseur des déformations étant cinématiquement admissible, alors on détient la solution de notre problème.



Il est à noter que ce schéma de résolution peut être simplifié si nous n'avons aucune condition aux limites sur les déplacements.

En effet dans ce cas, on peut se contenter de valider les équations de compatibilité en les vérifiant sous forme de contrainte, c'est-à-dire en employant les équations de Beltrami.

On peut aussi avoir un schéma de résolution en formulant des hypothèses sur le champ de déplacement.

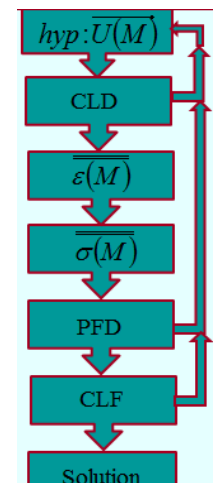
Ensuite, on vérifie les conditions aux limites sur les déplacements.

Puis on peut calculer les composantes du tenseur des déformations. Comme ce tenseur est obtenu à partir d'un champ de déplacement, il n'est pas nécessaire de vérifier les équations de compatibilités. A ce stade, l'état de déformation est cinématiquement admissible.

On peut alors définir le tenseur des contraintes par utilisation des lois de Lamé.

On peut alors tester le principe fondamental de la mécanique.

Et terminer en vérifiant les conditions aux limites sur les forces.



Si tous les tests sont positifs, on détient la solution du problème. Si, à partir des hypothèses émises, il n'est pas possible de vérifier l'un des tests du schéma utilisé, il faut alors revoir ces hypothèses.

6.

Regardons comment cette méthode nous permet de trouver l'état de contrainte et de déformation dans le cas d'un corps homogène de forme quelconque sollicité par une pression constante appliquée sur sa surface extérieure. En imposant cette pression, on constate que le corps ne change pas de forme, mais simplement de volume. Ce constat va nous permettre de construire notre schéma de résolution.

L'hypothèse de départ sera faite sur l'état de déformation. Le fait qu'il n'y ait pas de changement de forme dans l'application du chargement nous conduit à imaginer que la partie déviatorique du tenseur des déformations est nulle.

$$\overline{\varepsilon}_D(M) = 0$$

Donc notre tenseur déformation est purement sphérique, c'est-à-dire proportionnel au tenseur identité. A priori, le coefficient de proportionnalité est dépendant du point d'étude.

$$\overline{\varepsilon}(M) = \overline{\varepsilon}_S(M) + \overline{\varepsilon}_D(M) = \overline{\varepsilon}_S(M) = k \overline{I} \quad k = k(M)$$

Ne pouvant guère faire autre chose, nous allons regarder ce que cela donne sur le tenseur des contraintes. Ce dernier est obtenu par application de la loi de Lamé.

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{I}}$$

La trace du tenseur déformation est très simple à obtenir et au final on constate que le tenseur des contraintes est lui aussi proportionnel au tenseur identité.

$$\text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) = 3k \quad \overline{\overline{\sigma(M)}} = (2\mu + 3\lambda)k \overline{\overline{I}}$$

On peut maintenant regarder ce que nous donne le principe fondamental de la mécanique.

$$\overline{\overline{\text{div}(\overline{\overline{\sigma}})}} + \rho \overline{\overline{f}} = \rho \overline{\overline{\gamma}}$$

Le domaine est en équilibre donc le terme associé à l'accélération est nul.

$$\overline{\overline{\gamma}} = \overline{\overline{0}}$$

D'autre part, comme le seul chargement est celui imposé par la pression sur la surface du domaine, on peut considérer que les actions volumiques à distance sont nulles ;

$$\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{0}}$$

Le principe fondamental de la mécanique nous permet de dire que la divergence du tenseur des contraintes est nulle. Cela nous conduit à trois conséquences scalaires qui montrent que ce tenseur des contraintes est le même en tout point du domaine.

$$\overline{\overline{\text{div}(\overline{\overline{\sigma}})}} = \overline{\overline{0}} \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow k = cte$$

On peut s'intéresser à la condition aux limites sur les forces qui se traduit par le fait qu'un tout point de la surface extérieure du domaine,

$$\overline{\overline{T(M; \vec{n})}} = -p \overline{\overline{\vec{n}}}$$

Le vecteur contrainte selon la normale extérieure au domaine est égal au vecteur pression appliqué en ce point.

$$\overline{\overline{T(M; \vec{n})}} = \overline{\overline{\sigma}} \overline{\overline{\vec{n}}} = (2\mu + 3\lambda)k \overline{\overline{\vec{n}}} = -p \overline{\overline{\vec{n}}}$$

Cela nous permet de déterminer la valeur de la constante

$$k = -\frac{p}{2\mu + 3\lambda}$$

Avec ces deux conditions de vérifiées, le tenseur des contraintes est statiquement admissible. Il faut s'assurer que le tenseur des déformations est cinématiquement admissible. Pour cela il doit vérifier les équations de compatibilité. Bien que ces équations aient une forme assez compliquée, la vérification est immédiate et évidente car le tenseur des déformations est constant et que les termes intervenants dans ces équations sont des dérivées secondes des composantes de ce tenseur.

$$\overline{\overline{\text{grad div}(\overline{\overline{\varepsilon}})}} + \left(\overline{\overline{\text{grad div}(\overline{\overline{\varepsilon}})}} \right)^T - \overline{\overline{\text{grad} \left(\text{grad} \left[\text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \right] \right)}} - \Delta \overline{\overline{\varepsilon}} = 0$$

Maintenant, il faudrait regarder les conditions aux limites portant sur les déplacements imposés en surface du domaine, mais en fait nous n'en avons pas donc elles ne sont pas déterminantes pour l'étude.

On peut alors affirmer détenir la solution de notre problème. On constate que cette solution nous donne une expression très simple du tenseur des contraintes.

$$\bar{\sigma} = -p \bar{I}$$

7.

Nous venons d'établir une méthode qui permet d'avoir une solution analytique dans des cas simples. Elle est essentiellement basée sur le théorème d'unicité de la solution.

5-3

ELASTICITE LINEAIRE

Coordonnées cylindriques

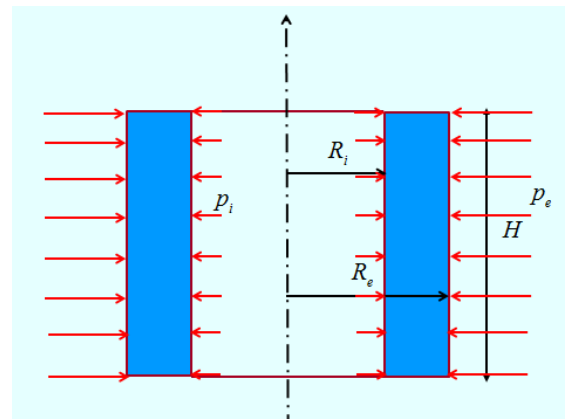
1.

Jusqu'à présent toutes nos relations ont été utilisées dans un système de coordonnées cartésiennes. C'est une solution qui donne toujours des résultats, mais ce n'est pas toujours le meilleur choix. Selon la géométrie du domaine et du chargement, il peut être utile de travailler dans un système curviligne.

2.

En seconde application, on peut essayer de trouver la solution d'une enveloppe sous pression. Il s'agit d'un tube à section droite circulaire, de longueur limitée. Du point de vue dimensionnel, il est caractérisé par un rayon intérieur R_i , un rayon extérieur R_e et une hauteur H .

Pour tout chargement, sur la paroi cylindrique intérieure est appliquée une pression P_i alors qu'il y a une pression P_e appliquée sur la paroi cylindrique extérieure.



3.

Avec ce chargement, il y aura bien évidemment des déformations et celles-ci vont essentiellement être occasionnées par les déplacements radiaux constatés en tout point de la matière. Aussi, nous allons nous placer dans un repère cylindrique naturel pour faire l'hypothèse que les composantes orthoradiale et axiale du champ de déplacement sont nulles.

$$\overline{U}(\overline{M}) = u_r \overline{E}_r + u_\theta \overline{E}_\theta + u_z \overline{E}_z = u_r \overline{E}_r$$

D'autre part, pour des raisons de symétrie, on considère que les variables de position angulaire et axiale ne sont pas des variables d'état. En conséquence, la composante radiale de déplacement n'est fonction que du rayon du point considéré. Avec ces hypothèses, au lieu d'avoir un champ de déplacement caractérisé par trois fonctions scalaires chacune dépendant de trois variables de positionnement, nous nous retrouvons avec une seule fonction scalaire ne dépendant que d'une seule variable. Il reste donc à vérifier si avec ces hypothèses nous obtenons un champ de déformation cinématiquement admissible associé par la loi de comportement à un champ de contrainte statiquement admissible.

$$u_r(r, \theta, z) = u_r(r)$$

Pour cela, nous allons tout d'abord calculer les composantes du tenseur des déformations. Ce dernier représente la partie symétrique du tenseur gradient du champ de déplacement. Pour utiliser correctement cette relation, on peut exprimer les composantes du champ de déplacement en coordonnées cartésiennes et utiliser les relations indicelles déjà vues. Mais on peut aussi utiliser la déclinaison des relations déplacements déformations en coordonnées cylindriques (cf annexe en fin du document). On remarque que, contrairement à ce que l'on peut imaginer de prime abord, la dilatation linéaire dans la direction circonférentielle n'est pas nulle. Toutefois après réflexion, on réalise que c'est normal, la circonférence évoluant en fonction des valeurs de pression.

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \frac{1}{2} \left[\text{Grad } \vec{U} + (\text{Grad } \vec{U})^T \right]$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{d u_r}{dr} ; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

Il est à noter que, comme nous n'avons aucune condition aux limites imposant des déplacements, le tenseur des déformations est cinématiquement admissible. Pour le calcul du tenseur des contraintes, on utilise les formules de Lamé

$$\overline{\overline{\sigma}} = 2 \mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{I}}$$

Cela nous donne les composantes du tenseur des contraintes. Comme nous sommes dans les directions principales, on obtient un tenseur diagonal. Bien entendu, tout est fonction de la composante radiale du champ de déplacement. On constate aussi que la contrainte normale axiale n'est pas nulle.

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2 \mu \frac{d u_r}{dr} + \lambda \left(\frac{d u_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = 2 \mu \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{d u_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{d u_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) \end{cases}$$

4.

Pour valider cette solution, nous devons vérifier que le tenseur des contraintes que nous venons d'obtenir est statiquement admissible. Pour cela, commençons par regarder si le principe fondamental de la mécanique est satisfait sous la forme locale. Le domaine étant en équilibre, le vecteur accélération est nul. Il en est de même pour le vecteur représentant les actions à distance car nous n'avons aucune force de volume imposée. L'équation locale de la résultante du principe fondamental de la mécanique prend alors une forme simple.

$$\overline{\overline{\text{div}}}(\overline{\overline{\sigma}}) + \rho \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \Rightarrow \overline{\overline{\text{div}}}(\overline{\overline{\sigma}}) = \vec{0}$$

Bien entendu, pour traduire correctement cette équation, il est bon de prendre les expressions en coordonnées cylindriques ce qui apporte à nos projections sur le système d'axe des composantes non triviales. De ces trois projections, on peut remarquer que seule la première nous apporte des éléments intéressants, les deux autres étant automatiquement satisfaites.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On exprime ensuite cette première équation en fonction des composantes du champ de déplacement. Cela nous conduit à une équation différentielle du second ordre vis-à-vis de la composante radiale du champ de déplacement.

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d(r u_r)}{dr} \right) \right] = 0$$

La résolution de cette équation différentielle nous conduit aux formes de déplacements cohérents avec le principe fondamental de la mécanique. Elles sont définies par deux constantes d'intégration.

$$u_r = \alpha r + \frac{\beta}{r}$$

Il est alors possible de calculer les composantes du tenseur des contraintes.

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2\alpha(\mu + \lambda) \\ B = 2\beta\mu \\ C = 2\alpha\lambda \end{cases}$$

Pour s'assurer que le tenseur des contraintes est statiquement admissible, il nous suffit de vérifier les conditions aux limites en efforts imposés sur les surfaces du domaine. Il faut traduire les applications de pression sur les surfaces cylindriques intérieures et extérieures, ce qui nous donne deux conditions vectorielles.

$$\text{Pour } r = R_i \Rightarrow T(\vec{M}; -\vec{E}_r) = -p_i(-\vec{E}_r) = p_i \vec{E}_r$$

$$\text{Pour } r = R_e \Rightarrow T(\vec{M}; \vec{E}_r) = -p_e(\vec{E}_r) = -p_e \vec{E}_r$$

5.

Avec ces conditions, on peut alors calculer les constantes d'intégration, en particulier celles associées aux composantes du tenseur des contraintes.

$$\begin{cases} A = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ B = \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir les deux constantes d'intégrations définissant le champ de déplacement :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{A}{2(\mu + \lambda)} = \frac{1}{2(\mu + \lambda)} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ \beta = \frac{B}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{cases}$$

Ayant calculé toutes les constantes, on pourrait croire avoir terminé et conclure sur ce résultat. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'il est important de bien traduire toutes les conditions aux limites. En l'occurrence, il faut utiliser le fait que les surfaces extrémités de notre cylindre ne sont pas chargées, ce qui nous donne des conditions vectorielles supplémentaires

$$\text{Pour } z = 0 \Rightarrow T(\vec{M}; -\vec{E}_z) = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = H \Rightarrow T(\vec{M}; \vec{E}_z) = \vec{0}$$

Celles-ci donnent une seule relation concernant les constantes. Mais ce résultat est bien évidemment incompatible avec les précédents. Cela signifie que nos hypothèses de départ ne sont pas bonnes. Après réflexion, il apparaît qu'en fait le champ de déplacement doit avoir une composante axiale qui est due essentiellement aux effets du coefficient de Poisson. Le lecteur resté sur sa faim au niveau de cette application pourra reprendre l'étude en considérant que le champ de déplacement a deux composantes : une composante radiale uniquement fonction du rayon et une composante axiale uniquement fonction de la position axiale du point.

$$\sigma_{zz} = C = 2\alpha \lambda = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

6.

Cette étude a montré qu'il y avait une certaine complexité à travailler dans un système de coordonnées cylindriques, mais il faut bien réaliser que la même étude aurait été beaucoup plus délicate à mener dans un système de coordonnées cartésiennes. Il est donc essentiel de savoir appliquer les bonnes formules au bon moment. D'autre part, nous avons vu qu'il était important de bien vérifier toutes les conditions imposées au domaine si l'on voulait être certain de détenir la bonne réponse au problème posé. Concrètement, nous avons maintenant tous les outils nécessaires à notre disposition pour traiter des problèmes de mécanique des solides déformables liés à une loi de comportement élastique linéaire. Il ne reste donc plus qu'à utiliser ces outils et à travailler.

5-3

ELASTICITE LINEAIRE

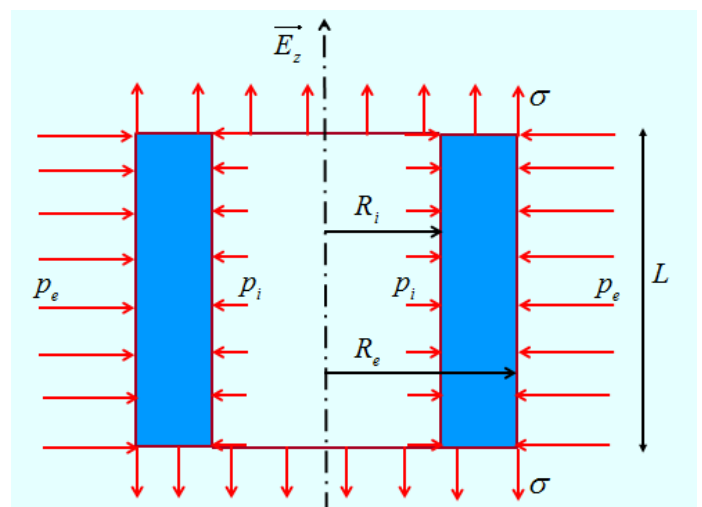
Application

1 - Etude d'une enveloppe cylindrique sous pression

Imaginons que nous ayons à définir la solution d'un tube sollicité par une pression intérieure p_i au rayon R_i , une pression extérieure p_e au rayon R_e et une traction σ sur les surfaces extrémités. La longueur totale du domaine est L .

Il est possible de faire des hypothèses sur les composantes du champ de déplacement. En effet, vu les symétries du problème, on peut raisonnablement penser que le champ de déplacement n'a pas de composantes orthoradiales, que la composante radiale ne dépend que de la coordonnée radiale et que la composante axiale n'est fonction de la coordonnée axiale. On suppose que, dans la base cylindro-polaire, le champ de déplacement est de la forme :

$$\vec{U}(M) = u_r(r)\vec{E}_r + u_z(z)\vec{E}_z$$



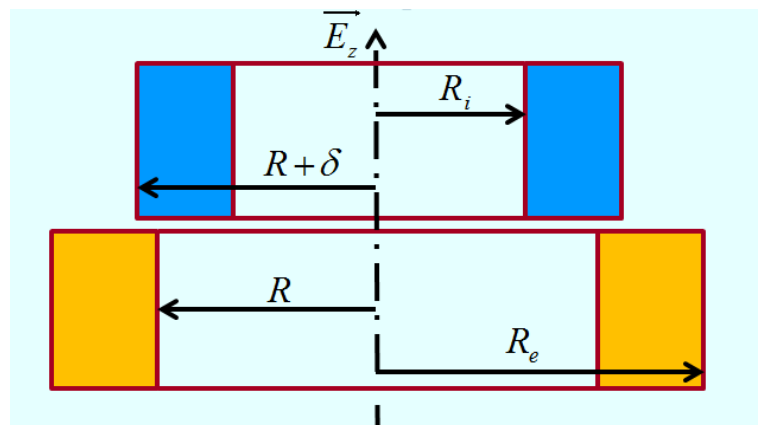
1-1 Définir en tous points du domaine l'état de contrainte en fonction du chargement et des données dimensionnelles.

1-2 Que deviennent les composantes du tenseur des contraintes dans la base principale lorsque la sollicitation de traction sur les surfaces extrémités est nulle.

1-3 Quelle doit être la valeur de la contrainte de traction si l'on veut que la longueur du domaine L soit invariante.

2- Etude d'un tube double (matériaux identique) fretté

A partir des résultats précédents, on peut étudier l'état de contrainte et de déformation au sein d'un assemblage cylindrique fretté. Les données du problème sont les suivantes. Un tube (numéro 1), de matériau élastique linéaire caractérisé par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν , de longueur finie L , de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur $R + \delta$ est



pris dans un tube (numéro 2), de matériau élastique linéaire identique au précédent, de même longueur L , de rayon intérieur R et de rayon extérieur R_e . On appelle δ le serrage. Cet assemblage crée une pression P à l'interface (rayon R).

2-1 Quelle est la valeur de la pression à l'interface ?

2-2 Que devient cette valeur dans le cas de l'application d'une pression P_i sur la surface intérieure (rayon R_i) et d'une pression P_e sur la surface extérieure (rayon R_e) ?

3- Etude du canon parisien

Injustement appelé « La Grosse Bertha », les Pariser Kanonen (canon parisien) furent utilisés en 1918 pour envoyer des projectiles de 125 kg (poids de l'obus de l'ordre de 400 kg avec poudre et accessoire) sur la capitale. Ces canons avaient une portée de l'ordre de 120 km. La vitesse initiale du projectile était de l'ordre de 1,5 km/s et ces projectiles atteignaient l'altitude de 40 km. La trajectoire était ainsi en partie dans la stratosphère ce qui limitait les frottements dû à l'air. Pour atteindre de telles performances, le fût du canon, d'une longueur impressionnante de 34 m, avait un alésage intérieur de l'ordre de 240 mm de diamètre et la pression maximale occasionnée par l'explosion de la poudre était de 4 000 bar. Il est à noter que ce diamètre intérieur augmentait au fur et à mesure des tirs (en fait il évoluait de 210 à 240 mm) et qu'il était nécessaire de refaire le tube au bout de 65 tirs. Dans la partie la plus sollicitée du fût (le tonnerre), le diamètre extérieur était de 960 mm. On admet que le matériau a un module d'Young $E = 210$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

3-1 Quelle doit être la limite élastique de l'acier utilisé si l'on ne veut pas entrer dans le domaine plastique?

3-2 Afin de réduire cette limite élastique, on envisage de réaliser le tube en frettage. On imagine donc avoir un premier tube avec un rayon intérieur $R_i = 120$ mm et un rayon extérieur légèrement supérieur au rayon d'interface de $R = 360$ mm. Le deuxième tube a un rayon intérieur égal au rayon d'interface et un rayon extérieur $R_e = 480$ mm. Quelle doit être la limite élastique de l'acier utilisé pour les valeurs de serrage au rayon suivantes : $\delta = 0,5$ mm ; $\delta = 1$ mm ; $\delta = 1,5$ mm ?

15.

Pour conclure notre enseignement sur la mécanique des solides déformables, nous allons traiter une application concernant le fretage de deux tubes. L'idée est de montrer l'intérêt de cette technique qui peut s'apparenter à une technologie de pré-contrainte.

16.

Voici l'énoncé de l'exercice. Les auditeurs sont invités à apporter des réponses de façon autonome puis à valider la solution en regardant les réponses proposées. Dans un premier temps, nous allons reprendre le cas d'une enveloppe cylindrique sous pression en ajoutant une sollicitation de traction aux extrémités du cylindre.

Puis, à partir des résultats précédemment obtenus, nous traiterons un problème de fretage de deux corps cylindriques. L'objectif est de démontrer qu'une telle opération permet de mieux résister à une sollicitation de pression.

Pour terminer par une application numérique, nous examinerons le cas de certains canons utilisés lors de la grande guerre. Ils étaient de dimensions impressionnantes pour des capacités hélas tout aussi impressionnantes.

17.

Essayons de valider nos hypothèses. Dans un premier temps on peut remarquer que comme dans notre problème nous n'avons aucune condition de déplacement imposé sur la surface de notre domaine et que d'autre part nous partons d'un champ de déplacement, le champ de déformation associé sera nécessairement cinématiquement compatible.

Il reste à vérifier que le champ de contrainte associé soit statiquement admissible. En ce qui concerne les équations d'équilibre, on pourrait être tenté d'utiliser les équations de Navier, mais il faudra ensuite déterminer les composantes du tenseur des contraintes afin de valider les conditions aux limites sur les forces.

$$\begin{aligned} \mu \overline{\Delta(\vec{u})} + (\mu + \lambda) \overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) &= \vec{0} \\ (\lambda + 2\mu) \overline{\text{grad}(\text{div}(\vec{u}))} - \mu \overline{\text{rot}(\text{rot}(\vec{u}))} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Aussi autant calculer immédiatement les composantes du tenseur des contraintes. Pour cela il faut utiliser les relations déplacement – déformation afin d'obtenir les composantes du tenseur des déformations. Attention les calculs doivent se faire dans la base cylindro-polaire et les formules utilisant les opérateurs différentiels (gradient, divergence, laplacien ...) n'ont pas les mêmes expressions indicielles que dans le cas d'une base cartésienne. Il est à noter qu'avec ces hypothèses les distorsions angulaires sont nulles, ce qui est logique si on imagine la déformation du tube. Nous sommes avec les axes principaux.

$$\overline{\varepsilon(M)} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{Grad} \vec{U} + (\mathbf{Grad} \vec{U})^T \right] \quad \overline{\varepsilon(M)} = \begin{pmatrix} \frac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{du_z}{dz} \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

18.

Comme la loi de comportement élastique linéaire est définie pour un matériau isotrope, elle peut être utilisée sous la même forme indiciale dans n'importe quelle base. On peut alors calculer facilement les composantes du tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \theta \overline{\overline{I}}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{du_r}{dr} + \lambda \theta & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \frac{du_z}{dz} + \lambda \theta \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z) \quad \theta = \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz}$$

Il reste maintenant à vérifier que le tenseur obtenu est bien statiquement admissible. Pour cela commençons par valider les équations d'équilibre, toujours en faisant bien attention à utiliser des formules valables en coordonnées cylindro-polaire. Comme le domaine est supposé être en équilibre et que les forces de volumes sont négligeables, le tenseur des contraintes doit avoir une divergence nulle :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}}(M) = \vec{0}$$

Compte tenu du fait que le tenseur des contraintes est diagonal, nous obtenons trois équations différentielles, mais en fait la deuxième est automatiquement satisfaite du fait que l'angle polaire n'est pas une variable d'étude.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

19.

Avec les hypothèses faites, la deuxième équation est identiquement satisfaite. La première et la troisième équation nous apportent deux équations différentielles.

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d|r u_r|}{dr} \right) \right] = 0 \\ \frac{d^2 u_z}{dz^2} = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont dès lors rapides à obtenir.

$$\begin{cases} u_r = \alpha r + \frac{\beta}{r} \\ u_z = \gamma z + \delta \end{cases}$$

20.

Ce qui nous donne les expressions suivantes pour les composantes du tenseur des contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 2\alpha(\mu + \lambda) + \gamma\lambda \\ B = 2\beta\mu \\ C = 2\alpha\lambda + \gamma(2\mu + \lambda) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{(2\mu + \lambda)A - \lambda C}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \\ \beta = \frac{B}{2\mu} \\ \gamma = \frac{(\mu + \lambda)C - \lambda A}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \end{array} \right.$$

Les constantes d'intégration peuvent aussi être définies à partir du module d'Young et du coefficient de Poisson :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\alpha + \gamma\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \\ B = \frac{\beta}{1+\nu} E \\ C = \frac{2\alpha\nu + \gamma(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1-\nu}{E} A - \frac{\nu}{E} C \\ \beta = \frac{1+\nu}{E} B \\ \gamma = -\frac{2\nu}{E} A + \frac{1}{E} C \end{array} \right.$$

21.

Avec les conditions aux limites, il est possible de fixer les constantes d'intégration. On connaît les valeurs du vecteur contrainte en chaque point appartenant à la surface extérieure et dans la direction de la normale extérieure au domaine. La constante δ intervenant dans le champ de déplacement n'est pas fixée, mais en fait quel que soit sa valeur, les expressions des tenseurs des contraintes et des déformations sont les mêmes. Cette constante traduit un déplacement de solide indéformable le long de l'axe du tube.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } r = R_i \quad T(\vec{M}; -\vec{E}_r) = -p_i (-\vec{E}_r) \\ \text{Pour } r = R_e \quad T(\vec{M}; \vec{E}_r) = -p_e \vec{E}_r \\ \text{Pour } z = 0 \quad T(\vec{M}; -\vec{E}_z) = -\sigma \vec{E}_z \\ \text{Pour } z = L \quad T(\vec{M}; \vec{E}_z) = \sigma \vec{E}_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ B = \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ C = \sigma \end{array}$$

22.

Pour terminer l'étude, il ne reste qu'à vérifier que l'état de contrainte obtenu en tout point soit en accord avec la limite élastique du matériau, ce qui peut être fait en employant par exemple le critère de Von Mises :

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \leq 2\sigma_e^2$$

$$3\left(\frac{B}{r^2}\right)^2 + (A - C)^2 \leq \sigma_e^2$$

Le cas le plus défavorable étant obtenu au rayon intérieur, on a la condition sur le chargement pour ne pas dépasser la limite d'élasticité :

$$3\left(\frac{(p_i - p_e)^2 R_e^4}{(R_e^2 - R_i^2)^2}\right) + \left(\frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2)} - \sigma\right)^2 \leq \sigma_e^2$$

23.

Pour étudier ce frettage, il faut commencer par traiter chaque pièce séparément. On peut noter tout d'abord que sur chacune des pièces il n'existe aucune sollicitation de traction exercée sur les bases, mais que cela ne

signifie pas pour autant qu'il n'y a pas de conditions aux limites sur ces faces. Il faut simplement dire que le chargement est nul sur ces surfaces annulaires.

Pour ce qui est du tube intérieur, le seul chargement non nul est celui dû à la pression d'interface sur la surface extérieure. L'expression des conditions aux limites permet de calculer les constantes d'intégration.

$$\text{Pour } r = R_i \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = -P \vec{E}_r$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_1 = -\frac{P R^2}{R^2 - R_i^2} \quad B_1 = -\frac{P R^2 R_i^2}{R^2 - R_i^2} = A_1 R_i^2 \quad C_1 = 0$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{1-\nu}{E}\right)(A_1) = -\left(\frac{1-\nu}{E}\right)\left(\frac{P R^2}{R^2 - R_i^2}\right) \quad \beta_1 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)(B_1) = -\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\frac{P R^2}{R^2 - R_i^2}\right) R_i^2 = \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \alpha_1 R_i^2$$

Pour ce qui est du tube extérieur, on retrouve un chargement dû à la pression d'interface mais appliqué sur la surface intérieure, ce qui nous donne les valeurs des constantes d'intégration.

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P(-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R_e \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_2 = \frac{P R^2}{R_e^2 - R^2} \quad B_2 = \frac{P R^2 R_e^2}{R_e^2 - R^2} = A_2 R_e^2 \quad C_2 = 0$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{1-\nu}{E}\right)(A_2) = \left(\frac{1-\nu}{E}\right)\left(\frac{P R^2}{R_e^2 - R^2}\right) \quad \beta_2 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)(B_2) = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\frac{P R^2}{R_e^2 - R^2}\right) R_e^2 = \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \alpha_2 R_e^2$$

24.

Pour calculer la pression d'interface P , il faut écrire une équation de compatibilité de déplacement des points adjacents situés à l'interface. Avec des notations évidentes, nous avons une relation entre les déplacements et le serrage : $u_{r2}(R) - u_{r1}(R) = \delta$

Ce qui nous conduit aux relations suivantes :

$$\alpha_2 \left(R + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{R_e^2}{R} \right) - \alpha_1 \left(R + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{R_i^2}{R} \right) = \delta$$

$$P \left[\frac{1}{E} \left(\frac{R}{R_e^2 - R^2} \right) \left[(1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_e^2 \right] + \frac{1}{E} \left(\frac{R}{R^2 - R_i^2} \right) \left[(1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_i^2 \right] \right] = \delta$$

$$P R \left(\frac{K_2}{E} + \frac{K_1}{E} \right) = \delta \quad \text{avec } K_1 = \frac{(1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_i^2}{R^2 - R_i^2} \quad \text{et } K_2 = \frac{(1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_e^2}{R_e^2 - R^2}$$

En définitive le résultat final prend une forme relativement simple. La pression d'interface est directement proportionnelle au serrage ce qui est tout à fait logique.

$$P = \left(\frac{E}{K_1 + K_2} \right) \frac{\delta}{R} = \frac{E \delta (R^2 - R_i^2) (R_e^2 - R^2)}{2 R^3 (R_e^2 - R_i^2)}$$

25.

Avec une pression intérieure et une pression extérieure, il faut simplement reprendre les conditions aux limites pour chacune des deux pièces. Cela nous conduit à de nouvelles valeurs pour les constantes associées au cylindre intérieur.

$$\text{Pour } r = R_i \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P_i (-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = -P \vec{E}_r$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_1 = \frac{P_i R_i^2 - P R^2}{R^2 - R_i^2} \quad B_1 = \frac{(P_i - P) R^2 R_i^2}{R^2 - R_i^2} \quad C_1 = 0$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{1-\nu}{E} \right) (A_1) = \left(\frac{1-\nu}{E} \right) \left(\frac{P_i R_i^2 - P R^2}{R^2 - R_i^2} \right) \quad \beta_1 = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) (B_1) = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \left(\frac{(P_i - P) R^2 R_i^2}{R^2 - R_i^2} \right)$$

De la même façon, il est possible de recalculer les nouvelles valeurs des constantes associées au cylindre extérieur.

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P (-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R_e \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = -P_e \vec{E}_r$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_2 = \frac{P R^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R^2} \quad B_2 = \frac{(P - P_e) R^2 R_e^2}{R_e^2 - R^2} \quad C_2 = 0$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{1-\nu}{E} \right) (A_2) = \left(\frac{1-\nu}{E} \right) \left(\frac{P R^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R^2} \right) \quad \beta_2 = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) (B_2) = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \left(\frac{(P - P_e) R^2 R_e^2}{R_e^2 - R^2} \right)$$

26.

Pour obtenir la valeur de la pression d'interface, il faut à nouveau écrire l'équation de compatibilité de déplacement des points adjacents situés à l'interface. Les formules commencent à devenir complexes et il est important de faire régulièrement des vérifications comme par exemple l'homogénéité des expressions obtenues. Il est à noter que le résultat final est indépendant du coefficient de Poisson.

$$u_{r2}(R) - u_{r1}(R) = \delta$$

$$\alpha_2 R + \frac{\beta_2}{R} - \alpha_1 R - \frac{\beta_1}{R} = \delta$$

$$((1-\nu)(PR^2 - P_e R_e^2) + (1+\nu)(P - P_e)R_e^2)(R^2 - R_i^2) - ((1-\nu)(P_i R_i^2 - PR^2) + (1+\nu)(P_i - P)R_i^2)(R_e^2 - R^2) = \frac{E\delta}{R}(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2)$$

$$P(((1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_e^2)(R^2 - R_i^2) + ((1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_i^2)(R_e^2 - R^2)) = \frac{E\delta}{R}(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2P_e R_e^2(R^2 - R_i^2) + 2P_i R_i^2(R_e^2 - R^2)$$

$$P = \frac{E\delta(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2R(P_e R_e^2(R^2 - R_i^2) + P_i R_i^2(R_e^2 - R^2))}{R((1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_e^2)(R^2 - R_i^2) + ((1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_i^2)(R_e^2 - R^2)}$$

$$P = \frac{E\delta(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2R(P_e R_e^2(R^2 - R_i^2) + P_i R_i^2(R_e^2 - R^2))}{2R^3(R_e^2 - R_i^2)}$$

$$\alpha_2 R + \frac{\beta_2}{R} - \alpha_1 R - \frac{\beta_1}{R} = \delta$$

$$P = \frac{E\delta(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2R(P_e R_e^2(R^2 - R_i^2) + P_i R_i^2(R_e^2 - R^2))}{2R^3(R_e^2 - R_i^2)}$$

27.

Dans le cas de notre canon on a un tube dont le rayon extérieur est 4 fois le rayon intérieur ($R_e = 4 R_i$) et qui est sollicité par une pression intérieure de 4 000 bar soit 400 MégaPascal. Avec ces données on peut facilement définir des formes simples pour les constantes d'intégration.

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = \frac{p_i}{15} \\ B = \frac{p_i R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} = A R_e^2 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

On peut ensuite regarder le critère de Von Misès pour déterminer la limite élastique minimale pour notre matériau. On rappelle que l'application du critère doit être faite en point de la surface intérieur car c'est l'endroit le plus sollicité. En conclusion, il faudrait que l'acier ait une limite élastique de l'ordre 740 MPa ce qui était très exceptionnel il y a un siècle.

$$3 \left(\frac{B}{R_i^2} \right)^2 + (A - C)^2 \leq \sigma_e^2$$

$$A^2 (3 * 16^2 + 1) \leq \sigma_e^2$$

$$1,84 p_i \leq \sigma_e$$

$$740 \text{MPa} \leq \sigma_e$$

28.

Dans le cas du tube fretté, il faut tout d'abord calculer la pression d'interface. Pour cela on peut reprendre la formule précédemment déterminée et la simplifier sachant que la pression extérieure est nulle, que le rayon d'interface est 3 fois le rayon intérieur et que le rayon extérieur est 4 fois le rayon intérieur.

$$P = \frac{E\delta(R^2 - R_i^2)(R_e^2 - R^2) + 2RP_iR_i^2(R_e^2 - R^2)}{2R^3(R_e^2 - R_i^2)}$$

$$P = \frac{E\delta * 8 * 7 * R_i^2 + 2 * 3 * R_i * P_i R_i^2 * 7}{2R_i^3 * 27 * 15}$$

$$P = \frac{28 E \delta}{405 R_i} + \frac{7 P_i}{135}$$

29.

On peut dès lors calculer les constantes d'intégration pour le tube intérieur sollicité par une pression interne et une pression externe.

$$\text{Pour } r = R_i \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P_i(-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = -P\vec{E}_r$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_1 = \frac{P_i R_i^2 - P R^2}{R^2 - R_i^2} = \frac{P_i - 9P}{8}$$

$$B_1 = \frac{(P_i - P)R^2 R_i^2}{R^2 - R_i^2} = \frac{9}{8}(P_i - P)R_i^2$$

$$C_1 = 0$$

Il faut faire de même avec le tube extérieur pour lequel nous n'avons qu'une pression interne due à la pression d'interface.

$$\text{Pour } r = R \quad \overline{T(M; -\vec{E}_r)} = -P(-\vec{E}_r)$$

$$\text{Pour } r = R_e \quad \overline{T(M; \vec{E}_r)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = 0 \quad \overline{T(M; -\vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } z = L \quad \overline{T(M; \vec{E}_z)} = \vec{0}$$

$$A_2 = \frac{P R^2}{R_e^2 - R^2} = \frac{9}{7} P$$

$$B_2 = \frac{P R^2 R_e^2}{R_e^2 - R^2} = \frac{16}{7} P R^2$$

$$C_2 = 0$$

30.

Il faut ensuite passer au calcul des contraintes équivalentes maximales pour les tubes. Comme nous l'avons déjà vu elles seront obtenues à chaque fois sur pour les rayons intérieurs, la surface interne du tube étant systématiquement la plus sollicitée.

$$\sigma_{eqVM1}^2 = 3 \left(\frac{B_1}{R_i^2} \right)^2 + (A_1 - C_1)^2$$

$$\sigma_{eqVM2}^2 = 3 \left(\frac{B_1}{R^2} \right)^2 + (A_1 - C_1)^2$$

$$\sigma_{eqVM1}^2 = 3 \left(\frac{9}{8} (P_i - P) \right)^2 + \left(\frac{P_i - 9P}{8} \right)^2$$

$$\sigma_{eqVM2}^2 = 3 \left(\frac{16P}{7} \right)^2 + \left(\frac{9P}{7} \right)^2$$

$$\sigma_{eqVM1}^2 = \frac{244 P_i^2 - 504 P_i P + 324 P^2}{64}$$

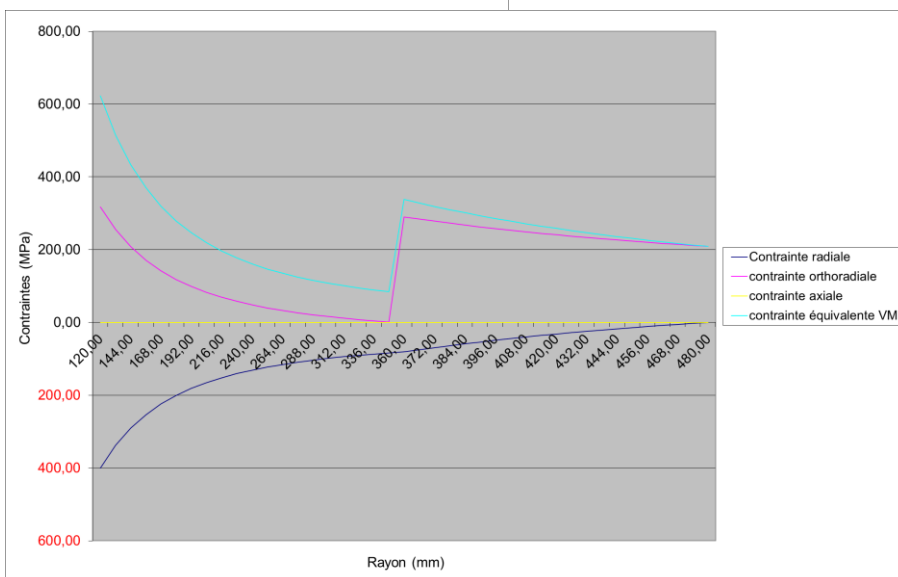
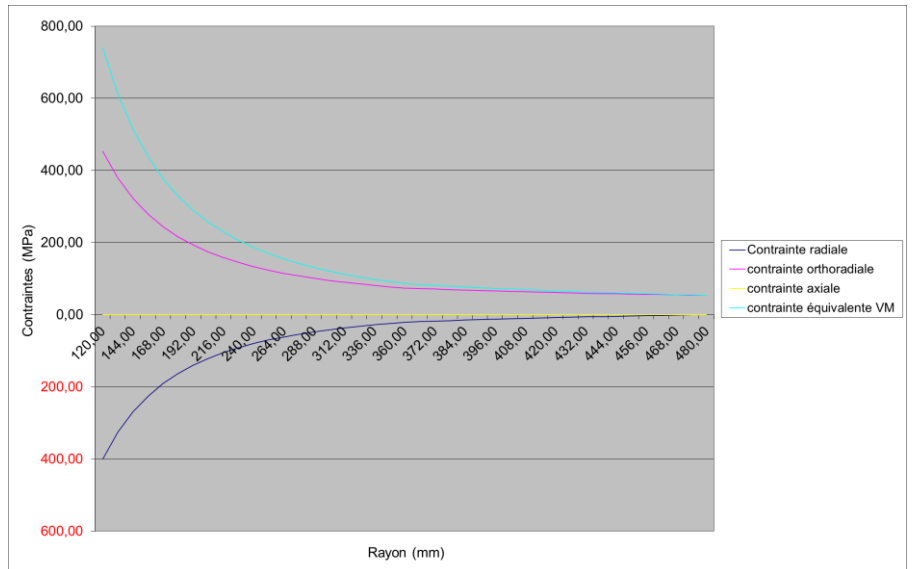
$$\sigma_{eqVM2}^2 = \frac{849}{49} P^2$$

Avec les valeurs numériques proposées et les formules obtenues on peut donner un tableau de résultats pour différentes valeurs de serrage. On constate que l'optimum est proche de 1 mm.

Serrage : δ (mm)	0	0,5	1	1,5	0,89
Pression d'interface : P (MPa)	20,74	81,23	141,73	202,22	128,42
Contrainte de Von Misès rayon intérieur pièce 1 : σ_{eqVM1}	739,49	622,51	515,02	424,29	537,56
Contrainte de Von Misès rayon intérieur pièce 2 : σ_{eqVM2}	86,33	338,14	589,95	841,75	534,55

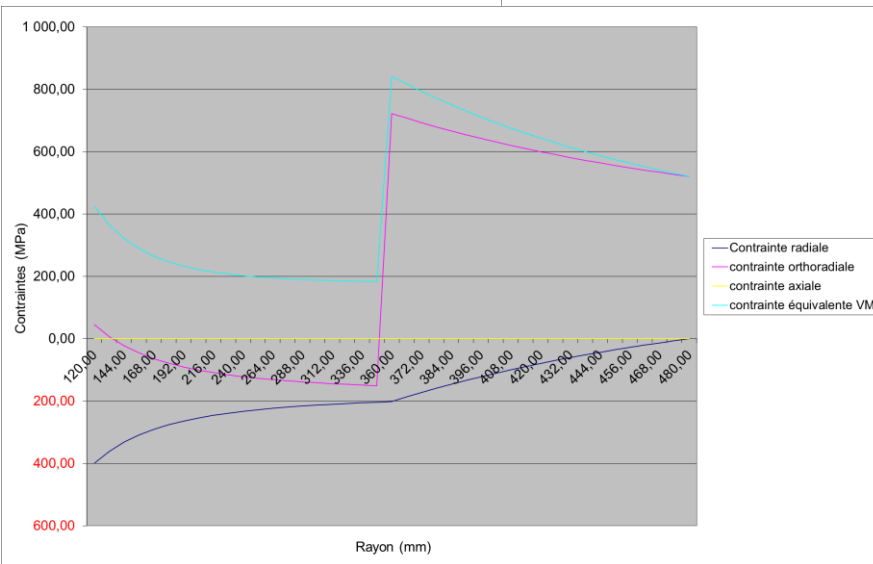
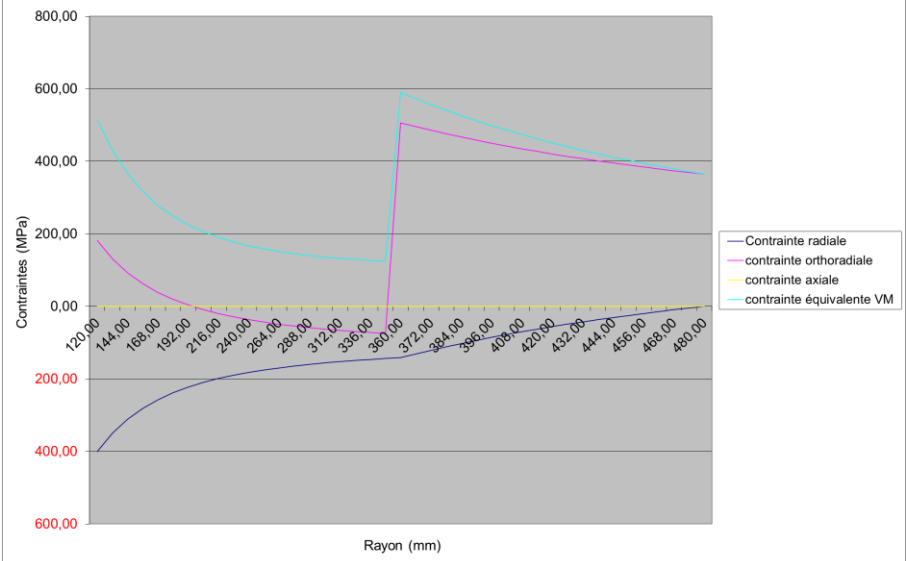
31.

Pour bien comprendre l'effet du serrage, on peut tracer les lois d'évolutions des contraintes principales et de la contrainte équivalente de Von Misès en fonction du rayon. Dans le cas d'un serrage nul, on constate que les contraintes radiales et orthoradiales sont maximales au rayon intérieur et qu'elles ont pratiquement la même valeur mais de signe opposées. La contrainte équivalente de Von Misès maximale vaut 739 MPa.



Avec un serrage de 0,5 mm, on voit que la contrainte orthoradiale au rayon intérieur a baissé et qu'elle présente une discontinuité au rayon d'interface. La contrainte équivalente de Von Misès maximale est de 623 MPa au rayon intérieur.

Avec un serrage de 1mm, la contrainte orthoradiale au rayon intérieur a encore baissé et la discontinuité à l'interface a augmenté en valeur. La contrainte équivalente de Von Misés maximale est égale à 590 MPa mais cette fois elle est située au rayon d'interface.



Pour un serrage de 1,5 mm tout est amplifié et on constate que l'on est allé trop loin, la contrainte équivalente de Von Misés maximale étant égale à 842 MPa au rayon d'interface. Avec les formules obtenues, il est simple de trouver le serrage optimum qui est de 0,89 mm et qui donne une contrainte équivalente de Von Misés maximale égale à 538 MPa. Il est possible de diminuer cette valeur maximale en jouant sur le positionnement du rayon d'interface. Par exemple avec un rayon d'interface à 300 mm et un

serrage à 0,65 mm, la contrainte équivalente maximale est en dessous de 500 MPa. Enfin il est encore possible d'abaisser cette valeur en construisant plusieurs frettages à des rayons judicieusement calculés.

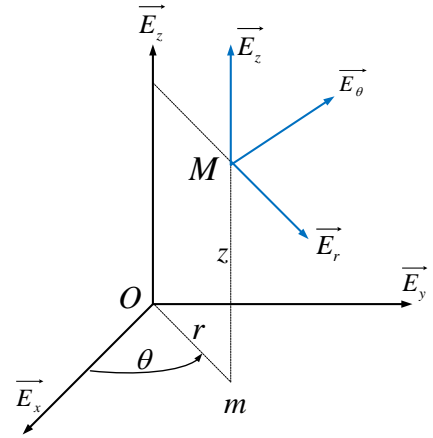
32.

Pour ne pas conclure cet enseignement en laissant penser que les applications de la mécanique des solides déformables sont guerrières, il convient de noter que les calculs de frettage sont aussi utiles pour un assemblage à base de roulement ou encore pour le dudgeonnage d'un tube dans une plaque. Mais dans cette dernière application, il convient de dépasser la limite d'élasticité du matériau et de faire les calculs avec une loi de comportement en plasticité ce qui dépasse les objectifs de ce cours mais laisse à l'auditeur encore de vastes champs d'investigation dans la mécanique.

Elasticité linéaire en coordonnées polaires

Relations Déplacement-Déformation

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \end{array} \right.$$



Principe fondamental de la mécanique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho(f_r - \gamma_r) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho(f_\theta - \gamma_\theta) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho(f_z - \gamma_z) = 0 \end{array} \right.$$

Equations de Beltrami

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial r} + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] + \Delta \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} \left(2 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial r^2} = 0 \\ \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial \theta} + \rho(f_r - \gamma_r) \right) + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] + \Delta \sigma_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2} \left(2 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial I_1}{\partial r} \right) = 0 \\ 2 \frac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial z} + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{div}[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})] + \Delta \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial \theta} - \rho(f_\theta - \gamma_\theta) \right) + \Delta \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2 \sigma_{r\theta\theta} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial I_1}{\partial \theta} \right) = 0 \\ \frac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial r} + \frac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial z} + \Delta \sigma_{rz} - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial r \partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial \theta} + \Delta \sigma_{\theta z} + \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta z} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 I_1}{\partial \theta \partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec : } \operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r \right) + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad \Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}$$

Opérateur différentiel

$$\text{si } g = g(r) \quad \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{1}{r^2} g = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r g) \right]$$