Mécanique des fluides

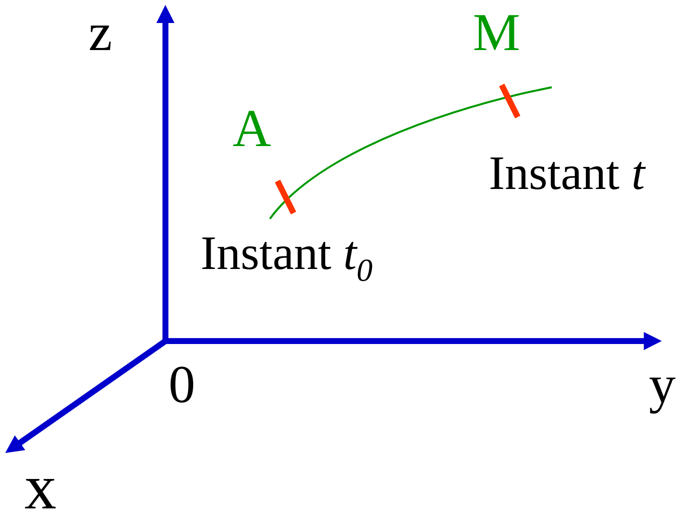
Cinématique des fluides

Variables de Lagrange

Définition

La cinématique, c'est l'étude du mouvement des fluides sans tenir compte des forces qui lui donne naissance

1- Variables de Lagrange – Variables d'Euler



Soient A (a,b,c) les coordonnées d'une particule de fluide à l'instant to dans le repère 0,x,y,z.

Les coordonnées indépendantes

(a, b, c, t) sont appelées variables de Lagrange

Variables de Lagrange

- Variables de Lagrange

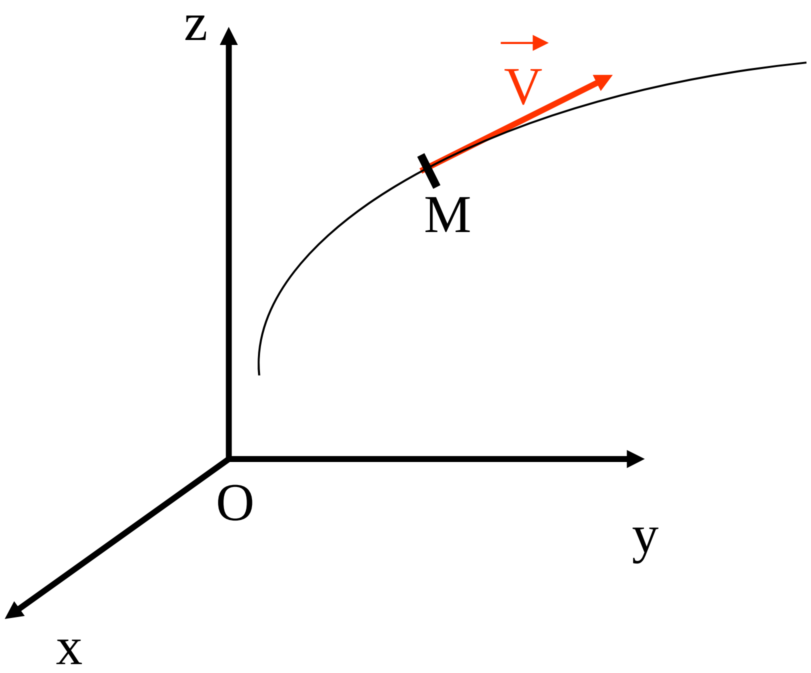
La position de la particule à l'instant t est M(x, y, z, t). Le mouvement du fluide est connu si on a les relations :

$$\boxed{\begin{cases} x = f_1(a,b,c,t) \\ y = f_2(a,b,c,t) \\ z = f_3(a,b,c,t) \end{cases}}$$

Dans cette description du mouvement du fluide, on suit individuellement chaque particule dans son mouvement

Variables d'Euler

- Variables d'Euler



Pour étudier le mouvement du fluide, il est souvent plus commode d'utiliser les variables d'Euler. Elles permettent, par exemple, de définir le champ des vitesses à chaque instant t et en tout point M du fluide.

Dans le repère O,x, y, z le vecteur vitesse a pour composantes :

$$\vec{V}(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

Variables d'Euler

- Variables d'Euler

Le point de vue d'Euler est plus commode pour l'expérimentateur, car on se place en un point M(x, y, z) du fluide et on étudie les variations des grandeurs physiques (par exemple la vitesse) à des instants différents.

Le point de vue d'Euler est plus commode en cinématique car :

- pour les écoulements permanents, la projection des vitesses dans le repère ne dépendent pas du temps

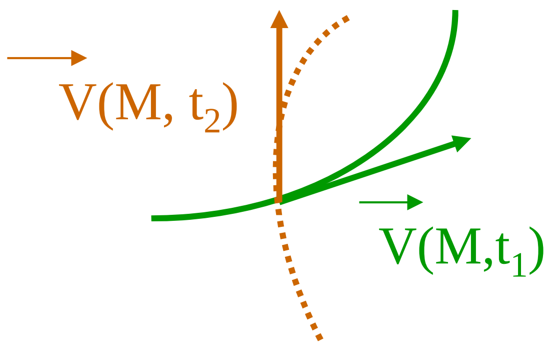
- les vecteurs vitesses de l'écoulement forment un champ de vecteurs auquel on peut appliquer les propriétés des champs de vecteurs

Ligne et tube de courant

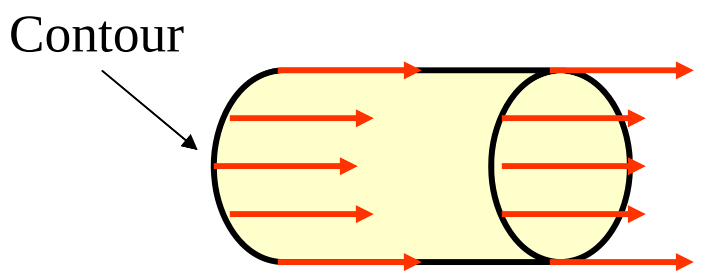
2 – Ligne et tube de courant

Ligne de courant : on appelle ligne de courant, toute courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à chaque instant et localement, colinéaire au vecteur vitesse du champ d'écoulement

Tube de courant : on appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé



Lignes de courant aux instants t_1 et t_2



Tube de courant relatif au contour

Équation des lignes de courant

- Équation

Relativement à un repère orthonormé, l'équation différentielle de toute ligne de courant s'écrit :

$$\boxed{\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}}$$

u(x,y,z,t), v(x, y, z, t) et w(x, y, z, t) sont les composantes de la vitesse dans le repère considéré

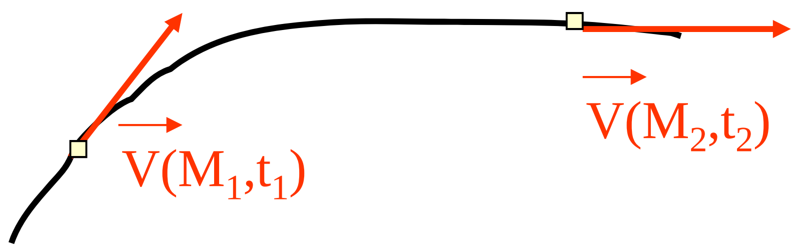
Dans cette relation, le temps est fixé

Trajectoire

3- Trajectoire

C'est la courbe décrite au cours du temps par une particule de fluide quelconque du champ d'écoulement.

La différence avec la notion de ligne de courant est que pour cette dernière, on considère des particules différentes au même instant tandis que la trajectoire est relative à une même particule à des instants différents.



Trajectoire

Équation

Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont données par :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x, y, z, t) \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \\ \dfrac{dz}{dt} = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

Dans ces équations, le temps est devenu une variable

Notion d’écoulement

4- Notion d’écoulement

Écoulement permanent (ou stationnaire) :

On dit qu’un écoulement est permanent si le champ des vitesses, la pression, la masse volumique en chaque point ne dépendent pas du temps.

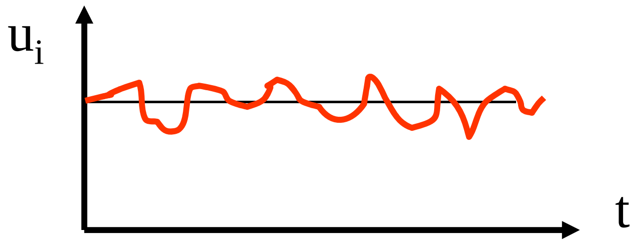
Écoulement permanent en moyenne :

Très souvent, les grandeurs physiques décrivant le fluides dépendent du temps mais restent constantes en moyenne

$$\boxed{\overline{u_i} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u_i \, dt}$$

Constant

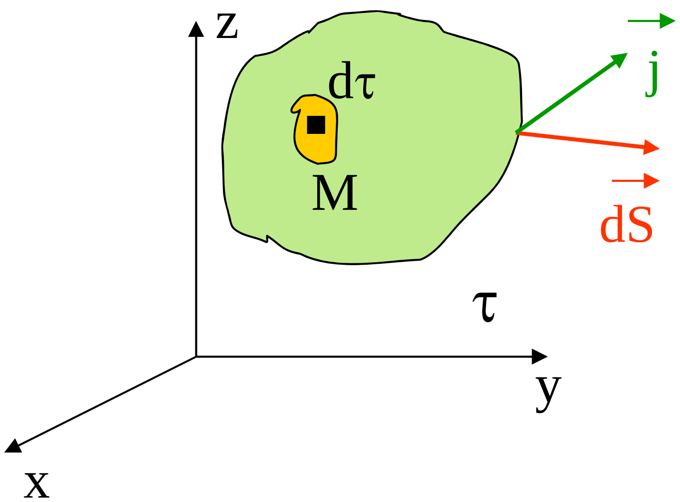
(T grand)



Équation de conservation de la masse

5- les équations de conservation de la masse

5-1 Densité de courant (de masse) : débit massique



Soit un volume τ de fluide limité par une surface S. On définit en chaque point M du fluide :

La masse volumique ρ ($kg.m^{-3}$)

La vitesse $\vec{V}$ ($m.s^{-1}$)

La densité de courant $\vec{j} = \rho \vec{V}$ ($kg.m^{-2}.s^{-1}$)

Le débit massique à travers la surface S : $\boxed{q = \oiint_S \vec{j}\, \vec{dS}}$ $kg.s^{-1}$

Écoulement conservatif

- Équation de conservation de la masse (équation de continuité)

5-2 Écoulement conservatif (sans production de fluide)

Faisons le bilan des masses :

Masse totale sortant de la surface S par unité de temps:

$$\oiint_S \vec{j}\,\vec{dS} = \iiint_\tau div\,\vec{j}\,d\tau$$

Dans l'élément de volume τ et pendant le temps dt, la variation de masse est égale à :

$$[\rho(x,y,z,t+dt) - \rho(x,y,z,t)]d\tau = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau$$

Écoulement conservatif

- Équation de conservation de la masse

Dans le volume τ et pendant l'unité de temps, il s'accumule :

$$\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Donc au total :

$$\boxed{\iiint_\tau (div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) d\tau = 0} \qquad \forall\,\tau$$

Cette équation représente la forme globale ou intégrale du principe de conservation de la masse

Équation locale

- Équation de conservation de la masse

On considère que dans le volume τ il n'y a pas de discontinuité et que l'élément de volume est quelconque, on peut donc écrire :

$$\boxed{div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Cette équation représente la forme locale du principe de conservation de la masse.

Régime permanent

- Cas particuliers

Régime permanent : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ D'où $\boxed{div(\rho \vec{v}) = 0}$

L'équation obtenue indique que le flux de $\rho.\vec{v}$ à travers une surface fermée est nul

$$\boxed{\iiint_{\tau} div(\rho \vec{v}) d\tau = \oiint_{S} \rho \vec{v} \, \vec{dS} = O}$$

Cette équation signifie donc la conservation du débit massique.

Fluide incompressible

- Cas particuliers

Pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad et \quad \rho = cst$$

$$\boxed{div\,\vec{v} = 0}$$

Donc le flux de la vitesse à travers une surface fermée est nul

$$\boxed{\iiint_{\tau} div\,\vec{v}\,d\tau = \oiint_{S} \vec{v}\,\vec{dS} = 0}$$

L'équation représente la conservation du débit en volume pour un fluide incompressible

Écoulement non conservatif

- Équation de conservation de la masse

5-3 équation de conservation de la masse avec production de masse dans l'écoulement

Il suffit d'ajouter le terme de production de masse dans l'équation bilan pour obtenir l'équation locale :

$$\boxed{div\rho\vec{v}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\rho q'}$$

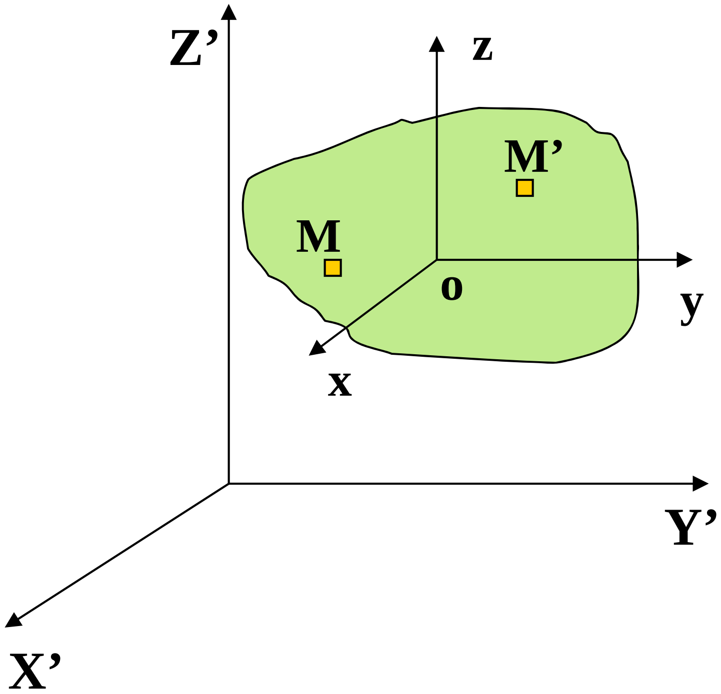
Dans cette équation, q' représente débit massique de production (en s^{-1})

q' > 0, représente une source et q'< 0 un puits

Champ des vitesses

6- Champ des vitesses

6-1 Cas du solide parfait (indéformable) - rappels



$$\vec{V}_{M'} = \vec{V}_M + \vec{\omega} \wedge \vec{MM'}$$

$\vec{\omega}$ est le vecteur rotation et :

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

En calculant $\vec{rot}\,\vec{V}_M$, on peut écrire $\vec{V}_{M'}$ sous la forme

$$\boxed{\vec{V}_{M'} = \vec{V}_M + \tfrac{1}{2}\,\vec{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{MM'}}$$

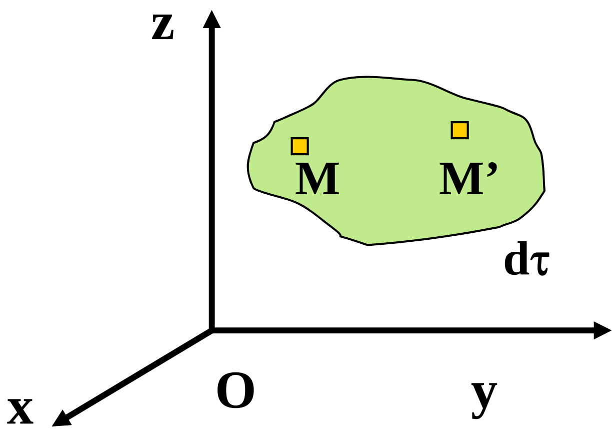
Champ des vitesses

- Interprétation physique

Le premier terme de l'expression de la vitesse représente une translation et le deuxième une rotation du solide.

Le terme $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{V}_M = \overrightarrow{\omega}$ est le vecteur rotation.

6-2 Cas du fluide – Vecteur tourbillon et tenseur des taux de déformation



Soit un élément de volume $d\tau$ et deux points M et M'infiniment voisins. Dans le repère

O, x, y, z les coordonnées de M et M' sont :

$$M(x, y, z) \quad \text{et} \quad M'(x+dx, y+dy, z+dz)$$

Champ des vitesses

Expression de la vitesse

Les coordonnées de la vitesse sont :

$$\vec{V}_M\,(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$$

$$\vec{V}_{M'}\left|\begin{array}{l} u(x+dx,y+dy,z+dz) \\ v(x+dx,y+dy,z+dz) \\ w(x+dx,y+dy,z+dz) \end{array}\right.$$

Nous allons simplement exprimer les coordonnées de la vitesse en M’ en utilisant la formule des accroissements finis. Par exemple pour la composante suivant x :

$$u(x+dx,y+dy,z+dz,t)=u(x,y,z,t)+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Champ des vitesses

- Expression de la vitesse

On écrit les mêmes expressions pour les autres composantes, on obtient la relation :

$$v_i(M') = v_i(M) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

v_i représente une composante de la vitesse au point M'

Sous forme vectorielle, on peut écrire

$$\boxed{\vec{V}_{M'} = \vec{V}_M + \left(\overrightarrow{MM'} . \vec{\nabla} \right) \vec{V}_M}$$

Champ des vitesses

Expression de la vitesse

Pour comparer l’expression précédente avec celle du fluide parfait et mettre en évidence la signification des différents termes, développons et calculons :

$$\overrightarrow{grad}(\vec{V}.\overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{MM'}.\vec{\nabla})\vec{V} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{V} + \vec{V} \wedge \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{MM'}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\vec{V}_{M'} = \vec{V}_M + \underbrace{\tfrac{1}{2}\overrightarrow{rot}}_{\text{Vecteur rotation = vecteur tourbillon}}\vec{V}_M \wedge \overrightarrow{MM'} + \underbrace{(\frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{V}_M \wedge \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{grad}(\vec{V}.\overrightarrow{MM'})}_{=\,\overline{\overline{D}}.\overrightarrow{MM'}} + \vec{V}_M}$$

Tenseur des taux de déformation

- Tenseur des taux de déformation

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Tenseur symétrique

Interprétation physique

- Expression de la vitesse

Pour mettre en évidence la signification physique des différents termes, écrivons la vitesse sous la forme :

$$\vec{V}_{M'} = \vec{V}_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'} + \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MM'}$$

Remarque : si $\overline{\overline{D}} = 0$, le taux de déformation est nul et l’on se ramène au cas du solide parfait indéformable (ou au cas d’un milieu déformable en équilibre absolu relatif)

Interprétation physique

- Voyons le sens physique des différents termes

$\overrightarrow{V}_M$: Représente une translation d'ensemble de l'élément de volume

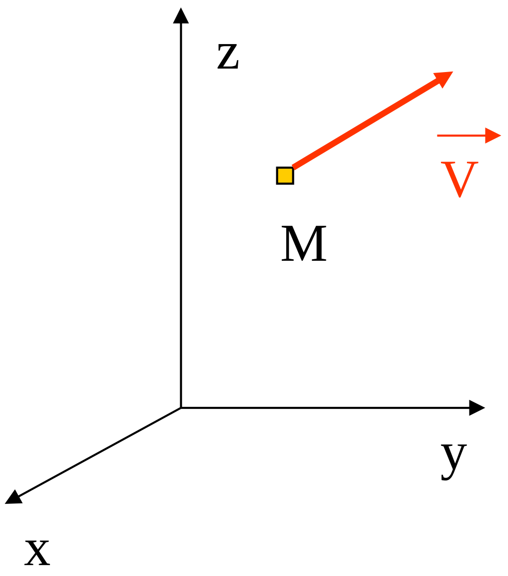
$\overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MM'}$ **:** représente la déformation de l'élément de volume

$\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$: est le moment par rapport à M' du vecteur 1/2 $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{V}_M$; c'est la répartition des vitesses lors d'une rotation en bloc de l'élément de volume autour d'un axe passant par M

Mouvement de fluide : translation + rotation + déformation

Accélération d'une particule de fluide

- Expression de l'accélération



Soit $\vec{a}$ le vecteur accélération, par définition, on a :

$$\vec{a}_{M,t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}_{M+dM,t+\Delta t} - \vec{V}_{M,t}}{\Delta t}$$

Dans le repère considéré, $\vec{V}$ a les coordonnées :

$$\vec{V}(u(x,y,z,t); v(x,y,z,t); w(x,y,z,t))$$

Expression de l'accélération

- Calcul de l'accélération

Prenons la coordonnée de la vitesse suivant l'axe x et calculons sa différentielle :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

Cette expression permet de calculer la composante de l'accélération sur l'axe x :

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Expression de l'accélération

- Forme vectorielle

On peut écrire l'expression précédente :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

On peut écrire le même type de relation pour les composantes suivant y et z, on obtient donc une relation vectorielle :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}}$$

Interprétation physique

- Autre écriture

En utilisant une égalité vectorielle, on obtient :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{grad}\,\vec{V}^2 + \overrightarrow{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}}$$

Interprétation physique :

$\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ est appelé accélération locale, ce terme traduit la non permanence de l'écoulement, il est nul pour un écoulement permanent

Interprétation physique

- Accélération convective

$$(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} = \frac{1}{2}\,\vec{grad}\,\vec{V}^{2} + \vec{rot}\,\vec{V}\wedge\vec{V}$$

est l'accélération convective, ce terme traduit la non uniformité de l'écoulement.

Pour vérifier si un écoulement est permanent, on se place en un point fixe de l'écoulement et on mesure la vitesse à des instants différents.

Pour voir si un écoulement est uniforme, on mesure la vitesse en différents points de l'écoulement, au même instant.

Dérivée particulaire

- définition

Soit une particule de fluide caractérisée par une grandeur scalaire ou vectorielle. La dérivée particulaire de cette grandeur est la dérivée par rapport au temps lorsque l'on suit la particule dans son mouvement

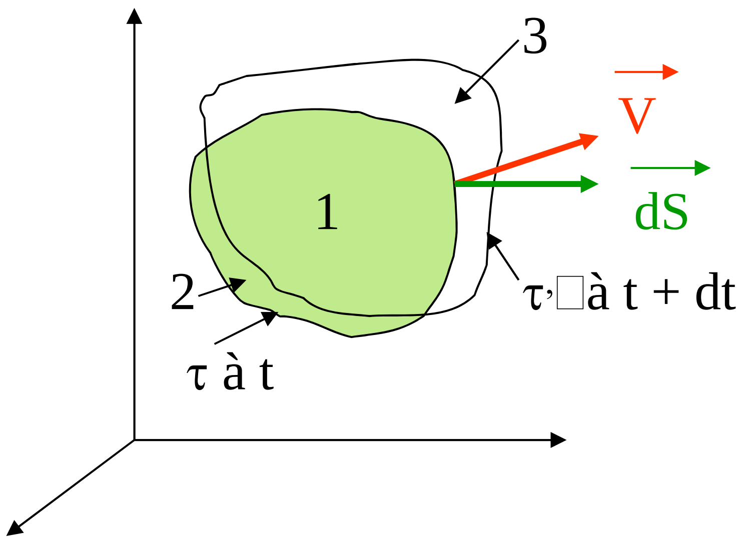
Exemples : la vitesse est la dérivée particulaire de la position et l'accélération est la dérivée particulaire de la vitesse.

Cas général : Cette notion peut s'étendre à toute grandeur scalaire ou vectorielle caractérisant un domaine de fluide de volume τ que l'on suit dans son mouvement.

Dérivée particulaire

- Exemple

Dérivée particulaire d'une intégrale I de volume caractérisant un domaine de fluide de volume τ que l'on suit dans son mouvement



$$I = \iiint_{\tau} f(x, y, z, t)\, d\tau$$

$$\tau \cap \tau' = 1$$

$$\tau' = 1 + 3$$

$$\tau = 1 + 2$$

Dérivée particulaire

- Calcul de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{dt}\left(\iiint_{\tau'=1+3} f(x,y,z,t+dt)d\tau - \iiint_{\tau=1+2} f(x,y,z,t)d\tau \right)$$

Le premier terme peut s'écrire:

$$\iiint_{\tau'} f(x,y,z,t+dt)d\tau = \iiint_{\tau} f(x,y,z,t+dt)d\tau + \iiint_{\tau'-\tau} f(x,y,z,t+dt)d^2\tau$$

avec $$d^2\tau = \vec{V}\,dt\,\vec{dS}$$

Dérivée particulaire

- Cas d'une intégrale de volume

En injectant l'expression précédente dans la première, on obtient :

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{\tau} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \frac{1}{dt} \oiint_{S} f(x,y,z,t+dt) \vec{V} dt\, \vec{dS}$$

Soit
$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{\tau} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \oiint_{S} f(x,y,z,t) \vec{V}\, \vec{dS}$$

En utilisant le théorème de Green Odstrogradski:
$$\oiint_{S} f(x,y,z,t) \vec{V}\, \vec{dS} = \iiint_{\tau} div\left(f\, \vec{V} \right) d\tau$$

Dérivée particulaire

- Cas de l'intégrale de volume : résultat

On obtient donc le résultat :

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \iiint_{\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\,\vec{V}) \right) d\tau}$$

Dérivée particulaire = dérivée locale + dérivée convective

Dérivée particulaire : exercice

- Conservation de la masse

1- A partir de la définition de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, retrouver l'équation de conservation de la masse pour un écoulement conservatif

2- Traiter le cas particulier du régime permanent dans le cas d'un écoulement à potentiel des vitesses ($\vec{V} = \overrightarrow{grad}\ \Phi$)

Indication : on exprimera que la masse du fluide est invariante dans son mouvement

Écoulement irrotationnel

- Définition

On appelle écoulement irrotationnel un écoulement pour lequel on a :

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{V} = 0}$$

De cette équation, on déduit immédiatement :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{grad}\,\Phi}$$

Un écoulement irrotationnel est un écoulement à potentiel des vitesses et réciproquement

Écoulement irrotationnel

- Équation de continuité

L'équation de continuité s'écrit :

$$div\rho\vec{V} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Pour un fluide incompressible et un écoulement irrotationnel, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} &div\vec{V} = 0 \; soit \; div(grad\Phi) = 0 \\ &donc \quad \Delta\Phi = 0 \end{aligned}}$$

Écoulement irrotationnel

- Expression de l'accélération

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{grad}\,\vec{V}^2}$$

Le terme $\overrightarrow{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$ est nul

Écoulement rotationnel ou tourbillonnaire

- Définitions

Le vecteur tourbillon représente le vecteur vitesse de rotation instantanée

$$\boxed{\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{V}}$$

On appelle ligne tourbillon une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur tourbillon, elle est telle que :

$$\boxed{\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}}$$

On appelle tube tourbillon, l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur un contour fermé

Écoulement rotationnel

- Propriétés

Par définition, le champ des vecteurs tourbillon est à flux conservatif

$$\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}\,\vec{rot}\,\vec{V} \Rightarrow div\,\vec{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{\omega}\,\vec{ds} = 0$$

Conséquence : le flux du vecteur tourbillon est constant dans un tube tourbillon.

On appelle intensité du tube tourbillon la quantité :

$$I = \iint_s \vec{\omega}\,\vec{dS}$$

$$\iint_S \vec{rot}\,\vec{V}\,\vec{dS} = \oint \vec{V}\,\vec{dl} = \iint_S 2\,\vec{\omega}\,\vec{dS} = 2I$$

Potentiel complexe

- Rappels

Hypothèses : on se place dans le cas d'un fluide parfait incompressible en écoulement plan irrotationnel et permanent.

Dans ce cas, la vitesse dérive du potentiel Φ

$$\boxed{\vec{V} = \overrightarrow{grad}\,\Phi}$$

Et l'équation de continuité s'écrit :

$$\boxed{\Delta\Phi = 0}$$

Variable complexe

- Conditions de Cauchy - Riemann

Soit f(z) la fonction de la variable complexe x + i y, f(z) est dérivable sur un domaine D si, dans le plan complexe :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{tend vers une limite finie} \quad \frac{df(z)}{dz}$$

On peut mettre f(z) sous la forme :

$$f(z) = \Phi + i\Psi$$

Où Φ est la fonction potentielle et ψ la fonction courant.

Conditions de Cauchy Riemann

- Calcul de la dérivée

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d\Phi + id\Psi}{dx + idy}$$

Pour que f soit analytique (Φ et Ψ satisfont à l'équation de Laplace), cette dérivée doit être indépendante de dz, soit, en développant :

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{(\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy) + i(\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy)}{dx + idy}$$

Conditions de Cauchy Riemann

- Fonction holomorphe

La condition d'indépendance implique que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

On obtient donc les relations :

$$\left\{\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}&=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=u\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}&=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}=v\end{aligned}}\right.$$

u et v sont les composantes de la vitesse

Ce sont les conditions de Cauchy Riemann

On dit que **la fonction f(z) est holomorphe sur le domaine D**

Potentiel complexe : exercices

- Trouver les lignes de courant et les équipotentielles dans les cas suivants :
  - Le potentiel complexe est : f(z) = V.z où V est une constante réelle et Z = x +i y
  - Le potentiel complexe est : f(z) = k ln(z) où k est une constante réelle